1.- La Tierra gira alrededor del Sol en una órbira aproximadamente circular. La distancia entre la Tierra y el Sol es de 1.5×10^8 Km. Si suponemos que la órbita es circular entonces podemos calcular, facilmente, la distancia que recorre la Tierra en su órbita alrededor del Sol. Este resultado nos servirá para conocer la velocidad con que se mueve la Tierra en su órbita, y conociendo dicha velocidad podremos "pesar al Sol", es decir, calcular su masa. a) Calcule la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. b) Calcule la masa del Sol.

Solución

Para representar los parámetros involucrados en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, consideraremos que M es la masa del Sol, m es la masa de la Tierra, y r es la distancia entre sus centros.

a)

A la rapidez con la cual un cuerpo gira se le llama velocidad de rotación. En mecánica la velocidad de un cuerpo está dada por $v = d/t$ donde d es la distancia recorrida y t el tiempo empleado en recorrer dicha distancia. Suponiendo que la Tierra se mueve en una órbita circular alrededor del Sol, la distancia recorrida por la Tierra equivale al perímetro de la circunferencia descrito por ella. El tiempo empleado será el utilizado en completar una vuelta alrededor del Sol (un año). Con base en lo anterior tendremos que la velocidad orbital de la Tierra está dada por

$$v = \frac{2\pi r}{t} \tag{1}$$

El radio de la órbita de la Tierra es r = 1.5×10^8 km = 1.5×10^{11} m. El tiempo empleado en dar una vuelta t = 1 año = 3.2×10^7 s.

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior tenemos que

v = 29 km/s

b) La Tierra en su trayectoria circular experimenta una fuerza centrípeta que por la segunda Ley de Newton ($F = ma$) está dada por:

$$F_c = m\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

La fuerza centrípeta F_c es precisamente la fuerza de atracción gravitacional que está dada por la siguiente ecuación:

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} \tag{3}$$

donde G $= 6.67 \times 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$

Puesto que estas dos ecuaciones son expresiones diferentes de la misma fuerza F, podemos igualar ambas ecuaciones

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{4}$$

Simplificando esta expresión obtenemos

$$G\frac{M}{r^2} = v^2 \tag{5}$$

Por lo que la masa del Sol, M, estará dada por

$$M = \frac{rv^2}{G} \tag{6}$$

Sustituyendo los valores de r, v y G en la ecuación anterior obtenemos que la masa del Sol es

M = 2 $\times$ 10^{30} **kg.**

2.- Un hoyo negro es una región del espacio-tiempo donde el campo gravitacional es tan intenso que ni siquiera la luz puede escapar de él.

a) Utilizando la ley de la conservación de la energía, calcule el radio que debe tener la Tierra para que sea un hoyo negro. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg y su radio es de 6.37×10^6 m.

b) Considerando la rotación de la Tierra sobre su eje (una vuelta por día) y la conservación del momento angular durante “la contracción” de la Tierra hacia un hoyo negro, calcule el radio para el cual se equilibrarían la fuerza centrífuga y la fuerza gravitacional.

c) Compare las respuestas de los incisos anteriores y explique si es posible que la Tierra se convierta en un hoyo negro.

Solución

a) La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo para que logre vencer el campo gravitatorio de otro. Para que un objeto escape de la Tierra y nunca mas regrese, debe lanzarse con una velocidad mayor que la que se requiere para ponerlo en órbita.
Consideremos una velocidad de escape tal que, cuando a un objeto le imprimimos justamente esta velocidad de escape, este tendrá una velocidad cero en un punto en el "infinito", en donde su energía total (ET = E. cinética + E. potencial) será

$$ET(\infty) = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R_\infty} = 0 \tag{7}$$

Debido a que la energía se tiene que conservar, entonces se requiere que en el momento del lanzamiento

$$ET(Tierra) = 0 = \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{GmM}{R} \tag{8}$$

donde G es la constante gravitacional cuyo valor es de G = $6.67 \times 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$, m es una masa de prueba, M la masa de la Tierra $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg, y R es el radio de la Tierra, R = 6.37×10^6 m.
Simplificando la expresión (8) obtenemos

$$\frac{v_{esc}^2}{2} = \frac{GM}{R} \tag{9}$$

$$v_{esc} = (\frac{2GM}{R})^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

Como, hasta donde se sabe actualmente, ningún objeto puede viajar mas rápido que la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s), esto implica que la máxima velocidad de escape es c. Entonces la ecuación para calcular el radio que debería de tener la Tierra para que fuera un agujero negro es

$$R_T = \frac{2GM}{c^2} \tag{11}$$

Sustituyendo los valores de G, M y, c obtenemos
R_T **= 8.8** $\times$ 10^{-3} **m = 8.8 mm**

Es decir, el diámetro que debería tener la Tierra para ser hoyo negro tendría que ser aproximadamente la mitad del diámetro de una pelota de ping-pong.

b)

Vamos a considerar a las condiciones normales de la Tierra como la etapa inicial y la contracción en un hoyo negro como la situación final. El momento angular L lo expresamos como $L = r\ m\ v$, siendo r el radio de giro, m la masa del objeto y v la velocidad de rotación.

Tomando en cuenta la conservación del momento angular

$$L_i = L_f = cte. \tag{12}$$

y sustituyendo la expresión para L obtenemos

$$r_i v_i = r_f v_f \tag{13}$$

(la masa m se cancela). Despejando encontramos que

$$r_f = \frac{r_i v_i}{v_f} \tag{14}$$

Esta expresión nos va a permitir determinar el radio en cualquier etapa de la contracción siempre y cuando conozcamos v_f. Nosotros queremos determinar el radio en el que se equilibran las fuerzas centrífuga y gravitacional, con esta condición hacemos lo siguiente

$$F_g = F_c \tag{15}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{16}$$

Simplificando obtenemos

$$r = \frac{GM}{v^2} \tag{17}$$

Nuevamente obtenemos una ecuación que nos va a permitir determinar el radio en cualquier etapa de la contracción siempre y cuando conozcamos v. Para la etapa final, que estamos considerando en este problema, la expresión anterior la escribimos como

$$r_f = \frac{GM}{v_f^2} \tag{18}$$

Combinando las ecuaciones (14) y (18) y despejando obtenemos

$$r_f = \frac{(r_i v_i)^2}{GM} \tag{19}$$

Sustituyendo los valores de G, M (masa de la tierra), r_i (radio de la Tierra) y v_i (la velocidad de rotación de la Tierra = 463.24 m/s) obtenemos

r_f**= 22 km**.

c)

Comparando los resultados del inciso a) y b) podemos concluir que la Tierra no se puede convertir en un hoyo negro, ya que para un radio menor que el del inciso b) la fuerza centrífuga se encargaría de despedazarla. Es decir, la Tierra no podría reducirse hasta tener un radio de 8.8 mm.

3.- La temperatura de la Fotosfera (la capa del Sol que vemos a simple vista) es de aproximadamente 6000 K. Suponiendo que el Sol emite como un cuerpo negro, a) calcule la longitud de onda en la que la emisión del Sol es máxima, b) calcule la energía emitida por el Sol en el rango del visible (4000 – 7000 Å).