Apéndice A

Breviario de cálculo vectorial

Alberto Carramiñana, 14 de septiembre de 2018

Este apéndice es un resumen básico de definiciones y fórmulas útiles basado en secciones de los libros citados en las referencias al final. Los temas son:
A.1. La función delta de Dirac; A.2. Productos entre vectores;
A.3. Diferenciación sobre curvas y superficies; A.4. Campos vectoriales;
A.5. Integración; A.6. Sistemas de coordenadas.

A.1. La función delta de Dirac

La función δ de Dirac permite definir entidades discretas de manera matemáticamente formal. Se puede definir de varias maneras, en particular asignándole las propiedades,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \neq 0\,, \\ +\infty & \text{para} \quad x = 0\,, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\,. \tag{A.1}$$

En particular $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$. Una manera alternativa de definir la función δ es como el límite de una gaussiana, $g(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\{-x^2/2\sigma^2\}$, para $\sigma \to 0$. Esta es una gaussiana infinitamente angosta con valor divergente en $x = 0$, manteniendo su normalización.

La función delta puede generalizarse mediante translaciones

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \neq a\,, \\ +\infty & \text{para} \quad x = a\,, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)\,, \tag{A.2}$$

y a un número arbitrario de dimensiones,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\,, \tag{A.3}$$

de manera que $\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dxdydz = 1$, al integrar sobre todo el espacio.

Como ejemplo, la densidad de carga debida a un conjunto de N cargas puntuales de valores $q_\imath$ situadas en posiciones $\vec{r}_\imath$ se especifica como:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\imath=1}^{N} q_\imath \delta(\vec{r}-\vec{r}_\imath)\,. \tag{A.4}$$

Las propiedades de la función delta permiten obtener el potencial $\varphi(\vec{r})$ evaluando la función dentro de la integral en los puntos $\vec{r}_\imath$, es decir

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' = \sum_{\imath=1}^{N} q_\imath \int \frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}_\imath)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' = \sum_{\imath=1}^{N} \frac{q_\imath}{|\vec{r}-\vec{r}_\imath|}. \tag{A.5}$$

Nótese que $\delta(x)$ tiene unidades de inverso de x, y $\delta(\vec{r})$ unidades de densidad numérica.

La función δ adquiere forma particular en coordenadas cilíndricas y esféricas, dadas por la condición de normalización:

$$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)RdR\,d\phi\,dz = 1 \Rightarrow \delta(\vec{r}) = \frac{1}{R}\delta(R-R_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0), \tag{A.6}$$

$$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)r^2dr\,\sin\theta d\theta\,d\phi = 1 \Rightarrow \delta(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\phi-\phi_0). \tag{A.7}$$

A.2. Productos entre vectores

A.2.1. Producto interno

Para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el espacio Euclidiano de tres dimensiones, el producto interno (o producto punto) entre ellos está definido como,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad .$$

En particular se define la norma ("longitud") de un vector, $|\vec{a}|$ con la relación $a^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$. Por definición se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$, (ii) $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b} = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$, siendo α un escalar,

(iii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, (iv) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

(v) la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$.
La proporcionalidad viene dada por el ángulo θ entre ambos vectores: $\cos\theta = |\vec{a}\cdot\vec{b}|/|\vec{a}||\vec{b}|$.

A.2.2. Producto vectorial

El producto vectorial (o producto cruz) entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está definido como

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\quad .$$

Por definición el producto vectorial cumple con las siguientes propiedades:

(i) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$,

(ii) $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$, siendo α un escalar,

(iii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$,

(iv) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$, siendo θ el ángulo entre ambos vectores.

Algunas propiedades de los productos vectoriales

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\ ,$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

A.3. Diferenciación sobre curvas y superficies

Una función de tres coordenadas (x,y,z) del tipo $f(x,y,z)=c$, con c una constante, describe una superficie en el espacio de tres dimensiones. La intersección de dos superficies describe una curva en tres dimensiones. Un ejemplo de superficie es la esfera de radio r dada por$x^2+y^2+z^2=r^2$. La intersección de la esfera con el plano $z=0$ nos da una curva en el plano xy.

Curvas en el espacio pueden definirse de forma paramétrica, como *trayectorias* definidas con las tres coordenadas como tres funciones $(x(t),y(t),z(t))$ de un mismo parámetro t. Por ejemplo, el círculo de radio r en el plano xy puede describirse como: $(r\cos(t),r\sin(t),0)$, con $0\le t\le 2\pi$.

La longitud de arco ℓ de una trayectoria $\vec{r}(t)$ para $a\le t\le b$ se define como

$$\ell=\int_a^b|\dot{\vec{r}}|\;dt=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;dt\,,$$

donde $\dot{x}\equiv dx/dt$.

A.3.1. Derivada parcial y gradiente

Las derivadas parciales se definen con respecto a cada una de las coordenadas de acuerdo a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{x}) - f(\vec{r})}{\epsilon} \right] ,$$

donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ y las derivadas parciales $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ se definen substituyendo x por y o z. Las derivadas parciales de mayor oden se hacen mediante derivaciones sucesivas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ,$$

con la notación $\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial x \partial x$. Se puede definir la derivada de f con respecto a un parámetro t, donde suponemos $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, a través de la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} .$$

Para la ecuación $z = f(x, y)$, el plano tangente a la superficie descrita en el punto $z_0 = f(x_0, y_0)$ está dado por

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0 (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0 (y - y_0) ,$$

las derivadas parciales siendo evaluadas en (x_0, y_0). Definiendo el gradiente de la función f como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} ,$$

el plano tangente a la superficie $\phi(x, y, z) = 0$ en el punto $\vec{r}_0$ corresponde entonces con $\nabla\phi_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. El gradiente corresponde con la dirección de mayor crecimiento de f y es ortogonal a las curvas de nivel (f = constante).

A.3.2. Teorema de Taylor y extremos

El teorema de Taylor se generaliza para funciones $f(\vec{r})$ con la expresión, aquí a segundo orden,

$$f(\vec{r}_0 + \vec{h}) = f(\vec{r}_0) + \nabla f(\vec{r}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2!}\sum_{\imath,\jmath} h_\imath h_\jmath \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath \partial x_\jmath}\right]_{\vec{r}_0} + \ldots .$$

Los puntos extremos de la superficie corresponde a $\nabla f(\vec{r}_0) = 0$. La determinación de si un punto extremo es máximo o mínimo requiere la evaluación del *Hessiano* en dicho punto (ver Marsden & Tromba).

A.4. Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función en un espacio de misma dimensión que el de coordenadas ($n = 3$ por lo general):

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y,z)\hat{x} + F_y(x,y,z)\hat{y} + F_z(x,y,z)\hat{z}\,.$$

La divergencia de F se define como

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\,,$$

y el rotacional como

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\,.$$

A partir de la divergencia se define el operador *Laplaciano*, derivada de segundo orden de una función escalar:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Algunas propiedades de los operadores vectoriales

$$\nabla \times \nabla f = 0\,, \quad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0\,,$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}\,,$$

$$\nabla \cdot \left(\psi \vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \nabla\psi + \psi \nabla \cdot \vec{F}\,,$$

$$\nabla \times \left(\psi \vec{F}\right) = \nabla\psi \times \vec{F} + \psi \nabla \times \vec{F}\,,$$

$$\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{E} + \vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\,,$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right) - \vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)\,,$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) - \vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{E} - \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{B}\,.$$

A.5. Integración

A.5.1. Integral de área

Para una función $f(x, y)$ podemos definir la integral de f sobre una región R, contenida en el plano xy,

$$I = \int_R f(x, y)\, dA\,,$$

con $dA = dx\, dy$, quedando implícito que la integración es *doble* (sobre dx y sobre dy). En el caso de una región definida por intervalos de la forma $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$ (un rectángulo) la integral se calcula sobre cada una de las variables,

$$I = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right) dy\,.$$

Regiones mas complejas pueden ser descritas acotando y mediante dos funciones $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, la integral se calcula de acuerdo con

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

A.5.2. Integral de volumen

La integral de volumen es una generalización a tres dimensiones. Para una función $f(x, y, z)$ y una región R del espacio de tres dimensiones podemos definir,

$$I = \int_R f(x, y, z)\, dV\,,$$

con $dV = dx\, dy\, dz = d^3r$. La integral es *triple* y se calcula definiendo la región R, ya sea con intervalos de x,y y z (un paralepípedo) o con funciones que describan la región, por ejemplo

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx\,.$$

Muchas veces es conveniente un cambio de variables o de sistema de coordenadas. La integral, originalmente sobre $\{x, y, z\}$ se calcula en el nuevo sistema de coordenadas $\{u, v, w\}$ empleando el determinante

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}\,,$$

ldenominado el *Jacobiano* de la transformación de coordenadas. Tenemos,

$$I = \int_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_R f(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\, dv\, dw\,,$$

requiriéndose la redefinición de la región R en términos de $\{u, v, w\}$. Ejemplos básicos de transformaciones de coordenadas son los correspondientes a los sistemas de coordenadas *cilíndricas* y *esféricas*.

A.5.3. Integral de trayectoria

Para una función $f(x, y, z)$ y trayectoria parametrizada mediante el vector $\vec{\sigma}(t)$ podemos definir la integral de la función sobre dicha trayectoria como

$$I = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \left|\dot{\vec{\sigma}}(t)\right| dt \quad ,$$

donde $a \leq t \leq b$. La diferencial de trayectoria es,

$$ds = \left|\dot{\vec{\sigma}}(t)\right| dt = \sqrt{\left(d\sigma_x/dt\right)^2 + \left(d\sigma_y/dt\right)^2 + \left(d\sigma_z/dt\right)^2}\, dt\,.$$

A.5.4. Integral de línea

Para un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ podemos definir la integral de línea sobre una trayectoria parametrizada por $\vec{\sigma}(t)$, donde $a \leq t \leq b$, como

$$I = \int_a^b \vec{F}\left[\vec{\sigma}(t)\right] \cdot \vec{\sigma}(t)\, dt\,.$$

A.5.5. Teoremas de análisis vectorial

Teorema de Gauss

Sea Ω una región de tres dimensiones contenida dentro de la superficie cerrada $\partial\Omega$. Para un campo vectorial $\vec{E}$ tenemos

$$\int_\Omega \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{a}\,.$$

Teorema de Stokes

Para un campo vectorial $\vec{F}$ definido sobre una región S, siendo ésta una superficie abierta dentro del espacio de tres dimension y acotada por la curva cerrada ∂S, tenemos

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Un campos conservativo es aquel que puede derivarse de un potencial, es decir $\vec{F} = -\nabla\phi$. Como consecuencia de las expresiones del cálculo vectorial, para un campo conservativo tenemos: $\nabla \times \vec{F} = 0$, y $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

A.6. Sistemas de coordenadas

El sistema básico de coordenadas es el cartesiano, donde los vectores de base son constantes en el espacio. En los demás sistemas de coordenadas la orientación de los vectores depende de la posición.

Dado un sistema de coordenadas $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, calculamos los factores de escala $\{h_1, h_2, h_3\}$ que nos permiten encontrar las expresiones de operadores las y diferenciales de línea,

$$d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{3} h_i \; \hat{\xi}_i \, d\xi_i \implies d\ell^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \, d\xi_i^2 \, , \tag{A.8}$$

siendo $\hat{\xi}_i$ los vectores ortonormales que definen al sistema de coordenadas y

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\right)^2 . \tag{A.9}$$

Los términos cruzados se anulan para un sistema de coordenadas ortonormal. Los operadores $\nabla\psi$, $\nabla \times \vec{A}$, $\nabla \cdot \vec{A}$ se definen a través de su expresión en coordenadas cartesianas, con $\vec{A} = \sum(\hat{\xi}_i/h_i)(h_i A_i)$, y empleando las expresiones de cálculo vectorial de §A.1, de donde salen las formas para sistemas arbitrarios de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\hat{\xi}_i}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} \, , \\
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial\xi_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial\xi_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial\xi_3} \right] , \\
\nabla \times \vec{A} &= \frac{\hat{\xi}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2 A_2) \right] + \frac{\hat{\xi}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_3 A_3) \right] \\
&+ \frac{\hat{\xi}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1 A_1) \right] , \\
\nabla^2\psi &= \nabla \cdot (\nabla\psi) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial\xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_3} \right) \right] .
\end{aligned}$$

Aparte de las expresiones en cada sistema, tenemos la diferencial de volumen $dV = (h_1 h_2 h_3) \, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, y las relaciones generales $\nabla \cdot \vec{r} = 3$, $\nabla \times \vec{r} = 0$.

A.6.1. Coordenadas cartesianas (x, y, z)

- Factores de escala: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.
- diferencial de línea: $d\vec{\ell} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz \Longrightarrow d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- diferencial de volumen: $d^3r = dx\,dy\,dz$.
- derivadas vectores de base: $d\hat{x} = d\hat{y} = d\hat{z} = 0$.
- vector posición: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.
- vector velocidad: $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$.
- vector aceleración: $\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$.

Operadores vectoriales:

$$\nabla\psi = \hat{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \quad \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,,$$

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\,,$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,.$$

A.6.2. Coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z)

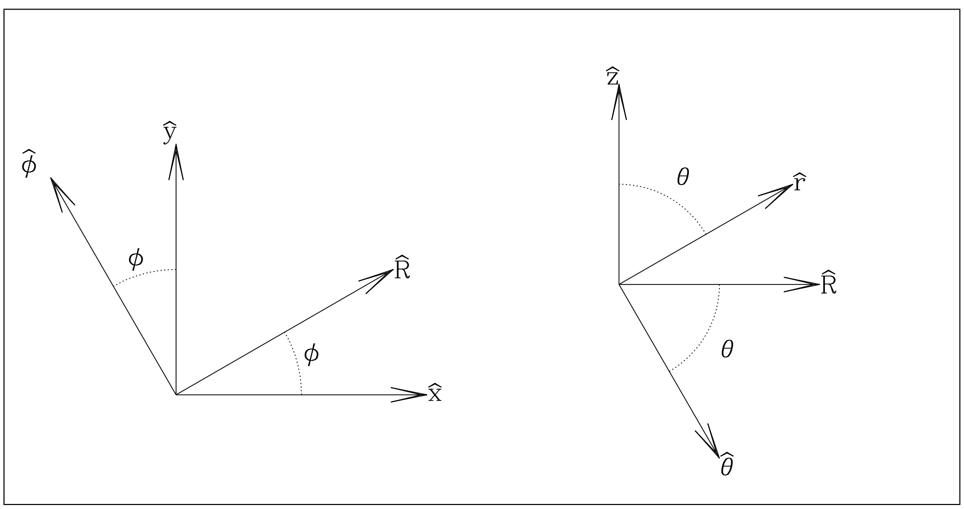

Figura A.1: Sistemas de coordenadas cilíndricas (*izq.*) y esféricas (*der.*).

- Transformación de coordenadas: $x = R\cos\phi\,,\ y = R\sin\phi$.
- Factores de escala: $h_1 = 1,\ h_2 = R,\ h_3 = 1$.
- Diferencial de línea:
  $d\vec{\ell} = \hat{R}\,dR + \hat{\phi}\,R\,d\phi + \hat{z}\,dz \Rightarrow d\ell^2 = dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2$.
- Diferencial de volumen: $d^3r = R\,dR\,d\phi\,dz$.
- Base vectorial: $\hat{R} = \ \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi\,,\ \hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$.
- Derivadas vectores base: $d\hat{R} = \hat{\phi}d\phi, \quad d\hat{\phi} = -\hat{R}d\phi, \quad d\hat{z} = 0\,$.
- Vector de posición: $\vec{r} = R\hat{R} + z\hat{z}$.
- Vector de velocidad: $\dot{\vec{r}} = \dot{R}\hat{R} + R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$.
- Vector aceleración: $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.

Operadores vectoriales:

$$\nabla\psi = \hat{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \hat{\phi}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \quad \nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial(R\,A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,,$$

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \frac{\hat{z}}{R}\left(\frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial\phi}\right)\,,$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{R}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,.$$

A.6.3. Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Relacionadas con coordenadas cilındricas con: $R = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$.

- Transformación de coordenadas: $x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta\,$.
- Factores de escala: $h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$.
- Diferencial de línea:
  $d\vec{\ell} = \hat{r}dr + \hat{\phi}\,r\sin\theta\,d\phi + \hat{\theta}\,rd\theta \ \Rightarrow\ d\ell^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + r^2 d\theta^2$.
- diferencial de volumen: $d^3r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,$.
- Base vectorial:
  $\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta, \quad \hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta\,,$
  $\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$.
- Derivadas vectores base:
  $d\hat{r} = -\hat{\theta}\,d\theta + \hat{\phi}\sin\theta\,d\phi\,, \quad d\hat{\theta} = -\hat{r}\,d\theta + \hat{\phi}\cos\theta\,d\phi, \quad d\hat{\phi} = -(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta)\,d\phi$.
- Vector posición: $\vec{r} = r\hat{r}\,$.
- Vector velocidad: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} - r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\phi}\,$.
- vector aceleración:
  $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\hat{\phi}\,$.

Operadores vectoriales:

$$\nabla\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\,,\ \nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\,,$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\hat{\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial R}\right]+\frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\,,$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\,.$$

Bibliografía

1. “Cálculo Vectorial”, Marsden & Tromba, ed. Fondo Educativo Interamericano

2. “Mathematical Methods in the Physical Sciences”, M. L. Boas, ed. Wiley

3. “Classical electrodynamics”, J.D. Jackson, ed. Wiley