

Física atmosférica - Cap 6. Dinámica atmosférica

Alberto Carramiñana

INAOE, Tonantzintla - 15 de abril de 2024

Dinámica atmosférica - temas

1. **Cinemática**

Planos horizontales en la atmósfera; propiedades dinámicas del flujo.

2. **Sistemas de coordenadas**

Coordenadas geográficas, cartesianas; sistema UTM; sistema de referencia en rotación; términos centrífugo y de Coriolis.

3. **Dinámica de fluidos**

Leyes de conservación; estructura vertical; escalas; conservación de masa; ecuación de Navier-Stokes; gravedad efectiva; gradientes de presión; viscosidad y fricción.

4. **Vientos**

Dinámica horizontal y vientos; viento geostrófico; fricción; advección y vientos de gradiente; vientos ciclostróficos; vorticidad; vientos térmicos.

5. **Ecuaciones primitivas**

Continuidad, momento, energía.

6. **Circulación atmosférica global**

Eficiencia termodinámica; modelo simple; términos no lineales; circulación global.

1. Cinemática

- ▶ Planos horizontales en la atmósfera.
- ▶ Coordenadas cartesianas, coordenadas locales.
- ▶ Propiedades dinámicas del flujo.

1. Cinemática - planos horizontales en la atmósfera

- ▶ Se definen “planos horizontales” en la atmósfera a partir de superficies de geopotencial (Φ), presión (p), o temperatura potencial (θ) constante.
- ▶ El plano se puede describir con coordenadas cartesianas fijas, (x, y) , como EW-NS; o con coordenadas localmente definidas, (s, n) , siguiendo *líneas de flujo*.
- ▶ La velocidad horizontal del viento está dada por,

$$\vec{V} = V\hat{s} \quad \text{con} \quad V = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dn}{dt} = 0 \quad \iff \quad \vec{V} = u\hat{x} + v\hat{y}. \quad (1)$$

- La componente vertical del flujo de aire es w , desacoplada de \vec{V} , mucho menor en magnitud y frecuentemente despreciable.
- ▶ Las líneas de flujo varían de dirección con la posición y con el tiempo \rightarrow no definen trayectorias.

1. Cinemática - coordenadas cartesianas y coordenadas locales

272 Atmospheric Dynamics

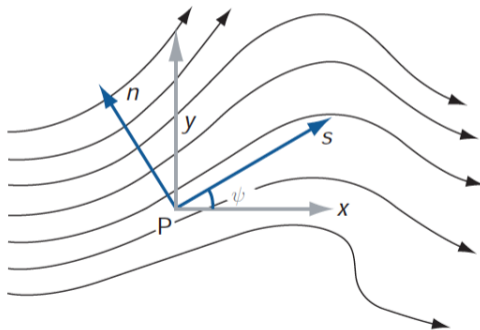


Fig. 7.1 Natural coordinates (s, n) defined at point P in a horizontal wind field. Curved arrows represent streamlines.

Transformaciones entre sistemas de referencia,

$$\begin{cases} \hat{s} = \hat{x} \cos \psi + \hat{y} \sin \psi \\ \hat{n} = -\hat{x} \sin \psi + \hat{y} \cos \psi \end{cases},$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{s} \cos \psi - \hat{n} \sin \psi \\ \hat{y} = \hat{s} \sin \psi + \hat{n} \cos \psi \end{cases}.$$

1. Cinemática - propiedades dinámicas del flujo

Algunas propiedades del flujo, definidas en coordenadas locales o cartesianas (W&H)

▶ **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{V}$

$$V \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial s} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

▶ **Stretching**

$$\frac{\partial V}{\partial s}.$$

▶ **Curvatura**

$$V \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

▶ **Deformación:** confluence + stretching

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

▶ **Vorticidad:** $\hat{z} \cdot (\nabla \times \vec{V}),$

$$V \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial n} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

▶ **Shear**

$$-\frac{\partial V}{\partial n}.$$

▶ **Difluencia**

$$V \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

2. Coordenadas

- ▶ Coordenadas geográficas.
- ▶ Sistema UTM: Universal Transverse Mercator.
- ▶ Sistema de referencia en rotación.
- ▶ Fuerzas no inerciales.

2. Coordenadas - geográficas, cartesianas

- ▶ La **coordenadas geográficas**, latitud y longitud $\{\phi, \lambda\}$, permiten ubicar cualquier punto de la superficie terrestre.
- ▶ Corresponden con **coordenadas geocéntricas** $\{x_g, y_g, z_g\}$, sistema cartesiano definido con \hat{e}_z alineado con el eje de rotación terrestre,

$$x_g = r \cos \phi \cos \lambda, \quad y_g = r \cos \phi \sin \lambda, \quad z_g = r \sin \phi, \quad (4)$$

con $r = R_{\oplus}$ para un punto en la superficie terrestre (suponiéndola esférica).

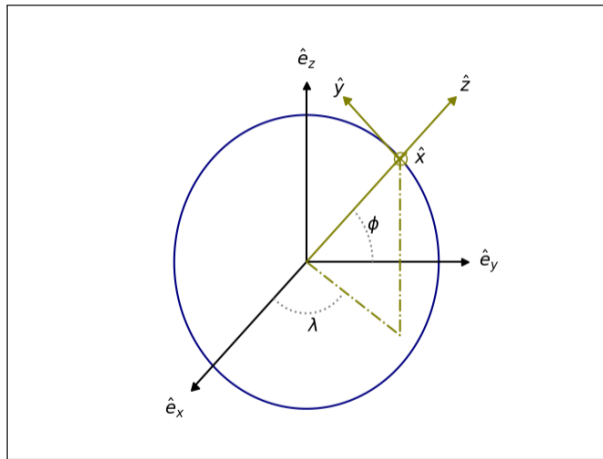
- Ecuador: $z_g = 0 \Leftrightarrow \phi = 0^\circ$; meridiano de Greenwich: $\lambda = 0^\circ \Leftrightarrow y_g = 0$.
- ▶ Se pueden definir **coordenadas cartesianas locales**, $\{x, y, z\}$, para una ubicación (ϕ, λ) ,

$$r = R_{\oplus} + z \Rightarrow dr = dz, \quad dx = r \cos \phi d\lambda, \quad dy = r d\phi, \quad (5)$$

con \hat{z} hacia el cenit (radial hacia arriba); \hat{x} hacia el Este; \hat{y} hacia el Norte.

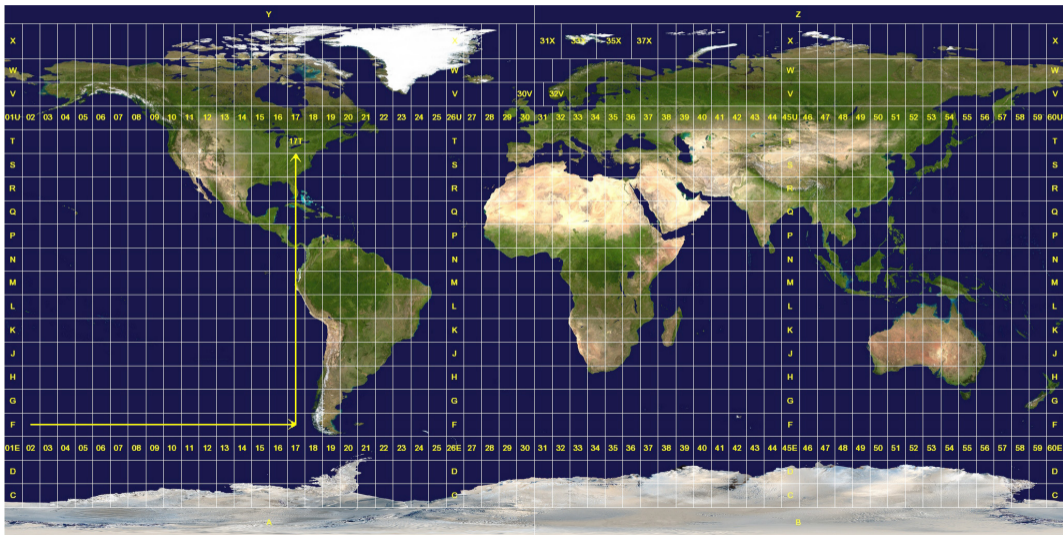
- ▶ Una realización formal es el sistema **UTM (Universal Transverse Mercator)**, proyección tangente que divide el globo en varias regiones.

2. Sistemas de coordenadas - geográficas, cartesianas



- ▶ Hay correspondencia entre los sistemas de coordenadas fijas cartesianas, $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$, y locales esféricas $\{\hat{\lambda}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$.
- ▶ Se supone una Tierra esférica.
- ▶ También se pueden definir posiciones con precisión en un elipsoide (radio ecuatorial \neq polar), o en el geoide (§. 2).

2. Coordenadas - sistema UTM (Universal Transverse Mercator)



2. Coordenadas - sistema de referencia en rotación

- ▶ Las leyes de la mecánica son válidas en **sistemas de referencia inerciales**.
 - Así, la ley de la inercia (1a de Newton), “en ausencia de fuerzas externas el movimiento es rectilíneo uniforme”, presupone un marco de referencia inercial.
- ▶ La dinámica de la atmósfera ocurre en un sistema de referencia **no inercial**, bajo la influencia de la rotación terrestre.
- ▶ **En un sistema inercial**, un vector \vec{a} que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, varía, tanto de forma intrínseca como por rotación, según,

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_0 + \vec{\Omega} \times \vec{a}. \quad (7)$$

- De donde, la segunda derivada,

$$\left(\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)_i = \left(\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)_0 + 2\vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}). \quad (8)$$

2. Coordenadas - fuerzas no inerciales, centrífuga y de Coriolis

- ▶ La segunda derivada del vector \vec{a} , en el marco de referencia en rotación, como es la Tierra, está dado por

$$\left(\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)_r = \left(\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)_0 - 2\vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_0 - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}). \quad (9)$$

- las variaciones intrínsecas del vector a ,

$$(d\vec{a}/dt)_0, \quad (d^2\vec{a}/dt^2)_0,$$

- el término **centrífugo**,

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}),$$

- el término de **Coriolis**,

$$2\vec{\Omega} \times (d\vec{a}/dt)_0.$$

- ▶ En un marco de referencia en rotación deben considerarse las variaciones intrínsecas de cantidades físicas junto con los términos de Coriolis y centrífugo.

3. Dinámica

- ▶ Leyes de conservación;
- ▶ estructura vertical;
- ▶ escalas;
- ▶ conservación de masa;
- ▶ ecuación de Navier-Stokes;
- ▶ gravedad efectiva;
- ▶ gradientes de presión;
- ▶ viscosidad y fricción.

3. Dinámica de fluidos - leyes de conservación

- ▶ El aire es un fluido, caracterizado por variables termodinámicas como la densidad, $\rho(\vec{r}, t)$, presión, temperatura y velocidad, $\vec{V}(\vec{r}, t)$.
- ▶ Las ecuaciones que describen la dinámica de fluidos son enunciados de leyes de conservación:
 1. **Conservación de masa**, expresada con la ecuación de continuidad.
 2. **Conservación de momento**, expresada con la ecuación de Navier-Stokes, que contiene la presión, la gravedad, la viscosidad y los términos no inerciales: centrífugo y de Coriolis. La componente vertical de esta ecuación corresponde con el equilibrio hidrostático.
 3. **Conservación de energía**: cinética y termodinámica.

3. Dinámica - estructura vertical, órdenes de magnitud

- ▶ La estructura vertical de la atmósfera está dictada por el **equilibrio hidrostático**,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = \rho R_a T = \rho g H,$$

con $H = R_a T / g = 8428 \text{ m } (T/288 \text{ K})$.

- La escala de velocidad asociada a la presión atmosférica es la del sonido,

$$c_s = (\gamma p / \rho)^{1/2} \simeq 340 \text{ m s}^{-1} (T/288 \text{ K})^{1/2}.$$

- ▶ **Los movimientos horizontales son subsónicos** ($V \sim 10 \text{ m/s}$).
- Los cambios de presión en el plano horizontal, correspondientes a $V \sim 10 \text{ m/s}$, son,

$$\Delta p = \rho g \Delta z \sim \rho V^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p \simeq 1.2 \text{ hPa}, \quad \Delta z \simeq 10 \text{ m}. \quad (10)$$

- ▶ **Los movimientos verticales son en general mucho más lentos** ($w \sim 1 \text{ cm/s}$).

3. Dinámica - escalas de la atmósfera

Escala	Símbolo	Magnitud
Radio terrestre	R_{\oplus}	6378 km
Escala horizontal	L	1000 km
Escala vertical	H	10 km
Día sideral	T	86,164 s
Rotación terrestre	$\Omega = 2\pi/T$	$0.729 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
Gravedad	g	10 m s^{-2}
Parámetro de Coriolis	$f \lesssim 2\Omega V$	10^{-3} m s^{-2}
Presión atmosférica ($z = 0$)	p_0	$1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$
Densidad del aire ($z = 0$)	ρ_0	1.2 kg m^{-3}
Velocidad del sonido	c_s	330 m s^{-1}
Velocidad horizontal del viento	V	10 m s^{-1}
Movimientos verticales	w	0.01 m s^{-1}

Tabla 1: Comparación dimensional de escalas en la atmósfera (Tabla 4.1, Andrews).

3. Dinámica - conservación de masa, ecuación de continuidad

- ▶ Un flujo de masa cuantificado por $\rho \vec{V}$ (masa por unidad de tiempo y área), cumple con la **conservación de la masa**, o ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (11)$$

- ▶ Al integrar ambos términos sobre un volumen \mathcal{V} , acotado por un área A se tiene,

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d^3x = - \oint_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{a},$$

la masa dentro de un volumen \mathcal{V} varía por el flujo que penetra la superficie que acota dicho volumen, siendo $d\vec{a}$ el elemento de área normal a la superficie.

- ▶ Empleando la regla de la cadena en la ecuación de continuidad, con $w = 0$,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{V}. \quad (12)$$

- fluido incompresible, $w \rightarrow 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$.

3. Dinámica - conservación de momento, ecuación de Navier-Stokes

- ▶ La **conservación de momento** se describe con la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{f}_{\text{visc}}. \quad (13)$$

- El flujo de momento es $\rho\vec{V}$; para un fluido incompresible $\rho = \text{constante}$.
- La componente vertical de la ecuación (13) corresponde al equilibrio hidrostático entre presión y gravedad, los términos dominantes.
- La fuerza centrífuga se puede incorporar a \vec{g} en un término de gravedad efectiva,

$$\vec{g}_{\text{ef}} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (14)$$

- La fuerza de Coriolis se puede escribir definiendo el parámetro de Coriolis, f ,

$$-2\vec{\Omega} \times \vec{V} \simeq -f\hat{z} \times \vec{V}, \quad f \equiv 2\Omega \sin \phi \simeq 1.458 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \sin \phi, \quad (15)$$

positivo en el hemisferio Norte, negativo en el hemisferio Sur.

3. Dinámica - Navier-Stokes: términos no inerciales

- ▶ La velocidad angular de la Tierra alrededor de su propio eje es,

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z = \Omega (\hat{y} \cos \phi + \hat{z} \sin \phi) .$$

Esta permite calcular localmente, en $\vec{r} = R_{\oplus} \hat{z}$:

- **El término centrífugo,**

$$-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = R_{\oplus} \Omega^2 \cos \phi (\hat{z} \cos \phi - \hat{y} \sin \phi) ,$$

que se incorpora a la gravedad terrestre, $\vec{g} = -g\hat{z}$, en la gravedad efectiva,

$$\vec{g}_{\text{ef}} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -(g - R_{\oplus} \Omega^2 \cos^2 \phi) \hat{z} + R_{\oplus} \Omega^2 \sin \phi \cos \phi \hat{y}, \quad (16)$$

siendo $R_{\oplus} \Omega^2 \ll g$. La gravedad efectiva incluye una componente horizontal (NS).

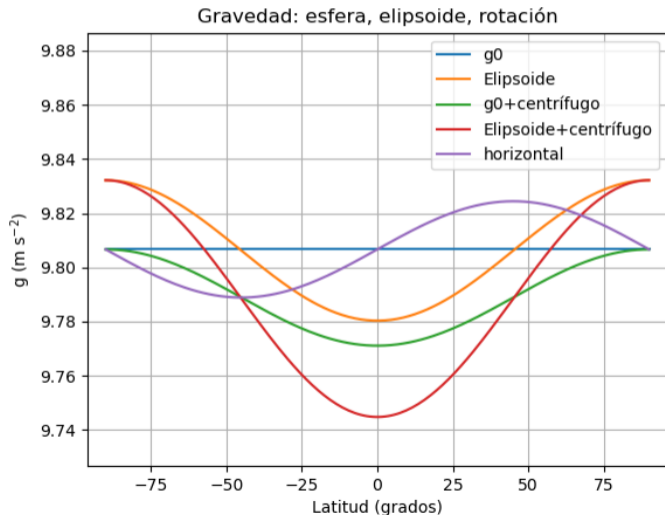
- **El término de Coriolis,**

para un movimiento horizontal, $\vec{V} = u\hat{x} + v\hat{y}$, la fuerza de Coriolis es,

$$-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = 2\Omega \sin \phi (\hat{x}v - \hat{y}u) + 2\Omega \cos \phi u \hat{z} \simeq -f\hat{z} \times \vec{V}, \quad (17)$$

ignorando el término vertical y empleado el parámetro de Coriolis, $f = 2\Omega \sin \phi$.

3. Dinámica - gravedad efectiva



1. $g_0 = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$
2. Gravedad del elipsoide: fórmula de Somigliana

$$g(\phi) = g_e \left(\frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \right),$$

$$g_e = 9.780327 \text{ m s}^{-2},$$

$$k = 1.931851 \times 10^{-3},$$

$$e^2 = 6.694380 \times 10^{-3}.$$

3. Términos centrífugos:

$$\Delta g = -R_{\oplus} \Omega^2 \cos^2 \phi;$$

$$g_{\perp} = R_{\oplus} \Omega^2 \sin \phi \cos \phi.$$

3. Dinámica - ecuación de Navier-Stokes; gradientes de presión

- ▶ La ecuación de Navier-Stokes, con la gravedad efectiva,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}_{\text{ef}} - f\hat{z} \times \vec{V} + \vec{f}_{\text{visc}}. \quad (18)$$

- ▶ La componente vertical está dominada por el equilibrio hidrostático,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g = -\frac{d\Phi}{dz}, \quad \text{con} \quad \Phi(z) = \int_0^z g(z') dz',$$

de forma que la presión disminuye conforme aumenta el geopotencial.

- ▶ El gradiente horizontal de presión tiene expresión análoga, modificando el signo,

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{\rho}\nabla p = -g\nabla z = -g_0\nabla Z = -\nabla\Phi. \quad (19)$$

- ▶ Los gradientes horizontales de presión (∇p , ∇Z , $\nabla\Phi$) son mucho menores que los verticales.

3. Dinámica - Navier-Stokes, horizontal

- ▶ Es común expresar los gradientes horizontales de presión como gradientes de geopotencial **con mismo signo**,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (20)$$

- ▶ Así, podemos escribir la componente horizontal de la ecuación de Navier-Stokes (18) como,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \hat{z} \times \vec{V} + \vec{f}_{\text{visc}} = -\nabla \Phi - f \hat{z} \times \vec{V} + \vec{f}_{\text{visc}}. \quad (21)$$

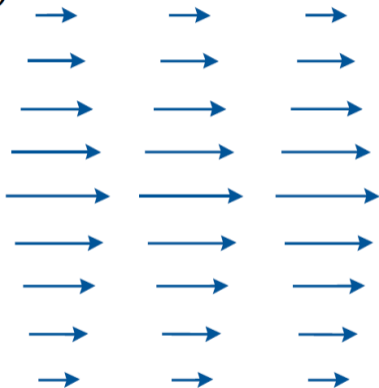
- ▶ Es decir,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f v + f_x^{\text{visc}}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f u + f_y^{\text{visc}}. \quad (22)$$

- Estas expresiones permiten describir características generales de los vientos.

3. Dinámica - fluidos; viscosidad y fricción

(a)



- ▶ La viscosidad del aire actúa entre capas de aire con movimiento diferencial, reduciendo el *shear*, $\partial V / \partial n$, y disipando energía.
- ▶ Los esfuerzos están descritos por el tensor τ , simétrico por definición,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

con μ coeficiente de viscosidad dinámica.

3. Dinámica - fluidos; viscosidad y fricción

- ▶ Los esfuerzos están descritos por el tensor τ , de 3×3 , definido de forma simétrica,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

con μ coeficiente de viscosidad dinámica.

- ▶ La fricción por viscosidad está dada por la divergencia del tensor de esfuerzos,

$$\vec{f}_v = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} = \nu \left\{ \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \right\} \rightarrow \nu \nabla^2 \vec{V},$$

con el límite para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$).

- ▶ En la atmósfera domina la fricción debida a gradientes verticales de movimiento ($\partial^2 V / \partial z^2$).
- ▶ Viscosidad cinemática del aire: $\nu = \mu / \rho = 1.48 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ a 15°C .

4. Vientos

- ▶ Dinámica horizontal y vientos;
- ▶ viento geostrófico; fricción;
- ▶ advección y vientos de gradiente;
- ▶ vientos ciclostróficos;
- ▶ vorticidad;
- ▶ vientos térmicos.

4. Vientos - dinámica horizontal, vientos

- ▶ Los principales tipos de vientos resultan de la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento horizontal del aire,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla\Phi - f\hat{z} \times \vec{V} + \vec{f}_{\text{visc}}, \quad (23)$$

con

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}.$$

- ▶ Ejemplos de vientos:
 - **Vientos geostróficos:** equilibrio entre gradientes de presión y fuerza de Coriolis.
 - **Vientos de gradiente:** generalización de geostróficos con advección.
 - **Vientos ciclostrófico:** gradientes fuertes en escalas pequeñas; vorticidad.
 - **Vientos térmicos:** influenciados por gradientes de temperatura.

4. Vientos - viento geostrófico

- ▶ Los vientos geostróficos corresponden al equilibrio entre gradientes de presión y la fuerza de Coriolis.
- ▶ Se dan a escalas intermedia a grande, con velocidades $u, v \sim 10$ m/s.
- ▶ Corresponden a parcelas de aire que experimentan cambios de velocidad tiempos mayores a un día (10^5 s) \Rightarrow término de Coriolis domina sobre $d\vec{V}/dt$ en (23).
- ▶ Dado un gradiente horizontal de presión $\nabla\Phi$, al ignorar $d\vec{V}/dt$ y \vec{f}_{visc} en (23), se tiene,

$$f\hat{z} \times \vec{V} = -\nabla\Phi \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{\hat{z}}{f} \times \nabla\Phi. \quad (24)$$

- ▶ Una distribución horizontal de presión define un viento geostrófico (24),

$$\vec{V}_g \equiv \hat{z} \times \nabla\Phi / f.$$

- ▶ El comportamiento general del viento es geostrófico.

4. Vientos - viento geostrófico

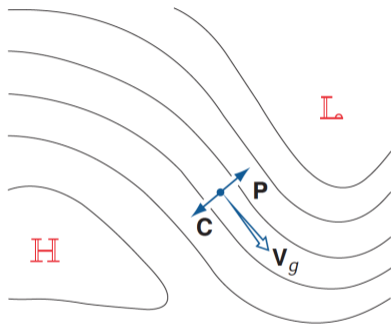
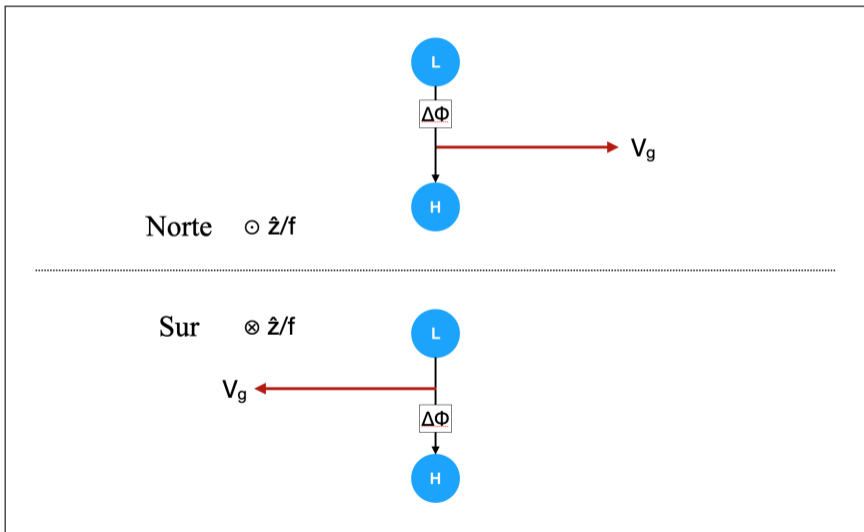


Fig. 7.9 The geostrophic wind V_g and its relationship to the horizontal pressure gradient force P and the Coriolis force C in the northern hemisphere.

- ▶ Definido por el equilibrio entre el gradiente de presión, \vec{P} , y la fuerza de Coriolis, \vec{C} , donde $\vec{C} = f\hat{z} \times \vec{V}_g$.
- ▶ En el hemisferio Norte $f > 0$: el vector de velocidad tiene a la presión baja del lado izquierdo \Rightarrow circulación ciclónica; en el hemisferio Sur $f < 0$: la circulación es anti-ciclónica.
- ▶ El viento geostrófico sigue curvas isobáricas ($\vec{V} \perp \nabla p$).

4. Vientos - viento geostrófico



4. Vientos - viento geostrófico; disipación por fricción

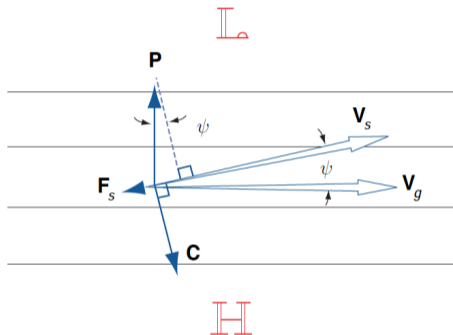


Fig. 7.10 The three-way balance of forces required for steady surface winds in the presence of the frictional drag force F in the northern hemisphere. Solid lines represent isobars or geopotential height contours on a weather chart.

- ▶ La viscosidad del aire causa fricción, disipando energía del viento.
- ▶ La fricción frena el viento, causando una deriva hacia la baja presión, $\vec{V}_g \rightarrow \vec{V}_s$, saliéndose de la isobárica.
 - Este efecto se conoce como deriva de Ekman (Ekman drift).
- ▶ La fricción es importante en partes bajas de la atmósfera, como la capa límite, y en la interfaz con relieves topográficos.

4. Vientos - advección; vientos de gradiente

- ▶ El término advectivo tiene frecuentemente un efecto importante en el viento.
- ▶ La identidad

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla(V^2/2) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

permite escribir la ecuación de Navier-Stokes (23), en el caso estacionario y sin viscosidad ($\partial/\partial t = 0$, $\vec{f}_{visc} = 0$), como,

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) = \vec{V} \times (f\hat{z} + \nabla \times \vec{V}) = \vec{V} \times \hat{z} (f + \omega). \quad (25)$$

- A la izquierda aparece la energía total del flujo, cinética más potencial.
- En medio el término de Coriolis (f) y la vorticidad, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \omega\hat{z}$.
- El producto vectorial con \hat{z} permite generalizar el viento geostrófico (24) en la expresión del viento de gradiente,

$$\hat{z} \times \nabla \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) = \vec{V} (f + \omega). \quad (26)$$

4. Vientos - vientos de gradiente en simetría acimutal

- ▶ Ecuación (26) en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) ,

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V_\varphi^2}{2} + \Phi \right) = V_R f + \frac{V_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_\varphi), \quad \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_R^2}{2} + \Phi \right) = V_\varphi f + \frac{V_\varphi^2}{R} - \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi}. \quad (29)$$

- ▶ Si Φ , V_φ tienen simetría acimutal ($\partial/\partial\varphi = 0$), la primera ecuación resulta en $V_R = 0$,² de donde,

$$\frac{V_\varphi^2}{R} + V_\varphi f - \frac{d\Phi}{dR} = 0. \quad (30)$$

- ▶ La solución es,

$$V_\varphi = -\frac{Rf}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2 f^2}{4} + R \frac{d\Phi}{dR}} = \frac{Rf}{2} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{Rf^2} \frac{d\Phi}{dR}} \right\}.$$

²o el otro término en la factorización es cero...

4. Vientos - vientos de gradiente

- ▶ La solución del viento de gradiente con simetría acimutal,

$$V_{\varphi} = \frac{Rf}{2} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{Rf^2} \frac{d\Phi}{dR}} \right\}. \quad (31)$$

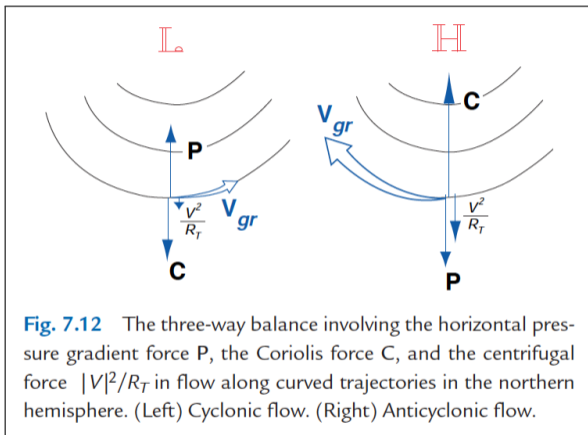
- ▶ **Presión alta:** $d\Phi/dR < 0$:

El viento de gradiente es posible sólo si $d\Phi/dR > -Rf^2/4$. Para el gradiente negativo el término en la raíz es menor que uno y ambas soluciones son anticiclónicas, $V_{\varphi} < 0$. Si el gradiente es pequeño la solución (+) es un viento geostrófico anticiclónico.

- ▶ **Presión baja:** $d\Phi/dR > 0$:

Siendo el gradiente positivo, el término en la raíz es mayor a uno y hay una solución ciclónica (+) y otra anticiclónica (-). Para $d\Phi/dR$ pequeña, la solución ciclónica es un viento geostrófico.

4. Vientos - vientos de gradiente



- ▶ Izquierda: circulación ciclónica alrededor de **L** con velocidad $V < V_g$. Velocidades $\lesssim V_g/2$ se observan en regiones del jet stream.
- ▶ Derecha: circulación anti-ciclónica alrededor de **H** requiere un flujo super-geostrófico, $V > V_g$.

4. Vientos - vientos ciclostróficos

- ▶ Gradientes fuertes de presión en escalas pequeñas pueden describirse ignorando el término de Coriolis en la ecuación de viento de gradiente con simetría acimutal ($V_R = 0$),

$$V_\varphi^2 = R \frac{d\Phi}{dR} \quad \Rightarrow \quad V_\varphi = \sqrt{\frac{R}{\rho} \frac{dp}{dR}}.$$

- ▶ En un tornado de radio $R = 500$ m con una depresión de 50 mbar en relación a su entorno ($dp/dR = 100$ mbar/km), se tiene $V_\varphi \simeq 60$ m s⁻¹.
- ▶ Los huracanes tropicales tienen un balance ciclostrófico alimentado por gradientes de temperatura y flujos de calor.

4. Vientos - vientos térmicos

- ▶ Al comparar vientos geostróficos en geopotenciales distintos, se tiene

$$(\vec{V}_g)_{z_2} - (\vec{V}_g)_{z_1} = \frac{\hat{z}}{f} \times \nabla(\Phi_{z_2} - \Phi_{z_1}).$$

- ▶ La ecuación de gas ideal, $\nabla\Phi = -\nabla p/\rho = -RT\nabla \ln p$, con R la constante de gas del aire, $p_{1,2}$ las presiones respectivas, permite escribir,

$$(\vec{V}_g)_{z_2} - (\vec{V}_g)_{z_1} = \frac{R}{f} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \hat{z} \times \nabla \bar{T},$$

con \bar{T} temperatura promedio entre geopotenciales, $\nabla \bar{T}$ su gradiente horizontal.

- si $\hat{z} \times \nabla \bar{T} = 0$ el viento es geostrófico, independiente de la altura.
- si $\hat{z} \times \nabla \bar{T} \neq 0$, el gradiente de temperatura puede reforzar el viento o invertirlo, dependiendo de su valor.

4. Vientos - gradiente de temperatura y viento geostrófico

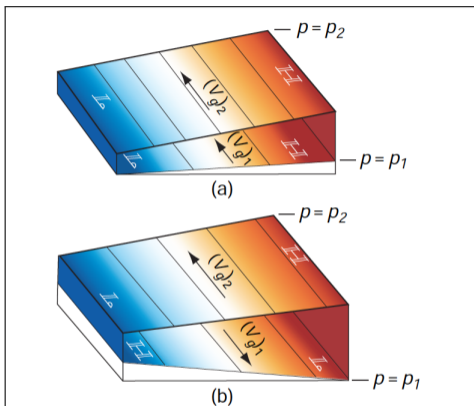


Fig. 7.13 The change of the geostrophic wind with height in an equivalent barotropic flow in the northern hemisphere: (a) V_g increasing with height within the layer and (b) V_g reversing direction. The temperature gradient within the layer is indicated by the shading: blue (cold) coincides with low thickness and tan (warm) with high thickness.

- ▶ En (a) el gradiente de temperatura es tal que $\hat{z} \times \nabla \bar{T}$ es paralelo a \vec{V}_g , dando lugar a un incremento de la velocidad del viento con la altura.
- ▶ En (b) el gradiente de temperatura es tal que $\hat{z} \times \nabla \bar{T}$ es antiparalelo a \vec{V}_{g1} , dando lugar a una inversión de la dirección del viento geostrófico.
- ▶ A escalas grandes, el gradiente térmico puede deberse a la diferencia en latitud.

4. Vientos - vorticidad

- ▶ Al calcular la divergencia de la ecuación (26) y considerar que el rotacional de un gradiente es cero, se obtiene

$$\frac{d}{dt} (f + \omega) = - (f + \omega) (\nabla \cdot \vec{V}), \quad (33)$$

con $\omega = \nabla \times \vec{V}$ la **vorticidad** del flujo horizontal.

- ▶ El parámetro de Coriolis, f , se puede interpretar como la vorticidad planetaria
 $\Rightarrow f + \omega =$ **vorticidad absoluta**.
- ▶ En primera aproximación, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, y la vorticidad es una cantidad que se conserva,

$$\frac{d}{dt} (f + \omega) = 0.$$

- ▶ La conservación de la vorticidad absoluta, y la variación de f con la latitud, hace que la vorticidad ω refuerze su caracter ciclónico en movimientos del Norte al ecuador e imparte una tendencia anticiclónica en movimientos hacia el Norte.

4. Vientos - vorticidad

- ▶ La conservación de la vorticidad puede expresarse como,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \omega \simeq -\beta v, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega}{R_{\oplus}} \cos \phi.$$

donde $\beta = 2.29 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \cos \phi$.

- ▶ El término $-\beta v$ se denomina “efecto beta”. Es importante en la formación de ondas Rossby.
- ▶ En la ecuación (33), se puede asociar la divergencia del flujo horizontal con movimientos verticales,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}.$$

- ▶ Estos amplifican fenómenos a gran escala como ondas baroclínicas y ciclones tropicales. Son importantes también para mantener perturbaciones a gran escala, compensando la disipación por fricción.

4. Vientos - vorticidad potencial

- ▶ En la expresión (33),

$$\frac{d}{dt}(f + \omega) = -(f + \omega)(\nabla \cdot \vec{V}),$$

se puede asociar a la divergencia del flujo una escala de altura,

$$-\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right) \rightarrow \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{f + \omega}{H} \right) = 0.$$

- ▶ El término entre paréntesis se denomina vorticidad potencial.
- ▶ Describe el aumento de vorticidad por compresión horizontal (H decreciente) y extensión vertical de una columna de aire (W&H §7.2.9).

5. Ecuaciones primitivas

- ▶ Las ecuaciones primitivas son las necesarias para construir un modelo atmosférico:
 - (1) conservación de masa, continuidad;
 - (2) equilibrio hidrostático;
 - (3) conservación de momento: Navier-Stokes horizontal;
 - (4) conservación de energía.
- ▶ Emplean la presión p como coordenada vertical, $(x, y, z) \rightarrow (x, y, p)$.
 - Se define $\omega \equiv dp/dt$, variación de la presión con el tiempo. Valores positivos de ω indican incrementos de presión correspondientes a movimientos descendentes (y viceversa).
 - Variaciones locales de presión son típicamente $\omega \sim 10 \text{ hPa/día}$;

5. Ecuaciones primitivas - conservación de masa

1. Continuidad:

- se expresa comúnmente en términos de $\omega = dp/dt$. Al desarrollar se obtiene,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\rho g w + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p.$$

A primer orden $\omega \simeq -\rho g w \sim 10 - 100 \text{ hPa dia}^{-1}$.

- Se puede expresar en términos del movimiento vertical de masas de aire, descrito con ω , las cuales influyen en las condiciones locales. De la ecuación de continuidad se obtiene,

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla \cdot \vec{V}. \quad (34)$$

5. Ecuaciones primitivas - conservación de masa

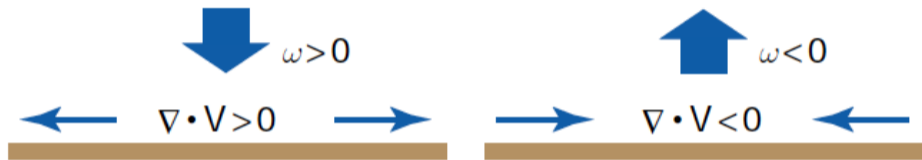


Fig. 7.18 Algebraic signs of ω in the midtroposphere associated with convergence and divergence in the lower troposphere.

Figura 4: Conservación de masa en términos de la divergencia del flujo horizontal, $\nabla \cdot \vec{V}$, y flujo vertical, descrito con ω .

5. Ecuaciones primitivas - conservación de momento

2. Equilibrio hidrostático:

los términos dominantes en la componente vertical de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \nabla \Phi = -RT \nabla \ln p.$$

3. Momento horizontal:

las componentes horizontales de la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla \Phi - f \hat{z} \times \vec{V} + \vec{f}_{visc}.$$

5. Ecuaciones primitivas - conservación de energía

4. **Conservación de energía:** a partir de la primera ley de la termodinámica,

$$J dt = c_p dT - \alpha dp.$$

con J energía recibida por unidad de masa y tiempo (dt), $c_p dT$ entalpía, αdp trabajo mecánico, con α volumen específico

- De donde, la ecuación de energía en términos de la variación de temperatura,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa T}{p} \omega + \frac{J}{c_p}. \quad (35)$$

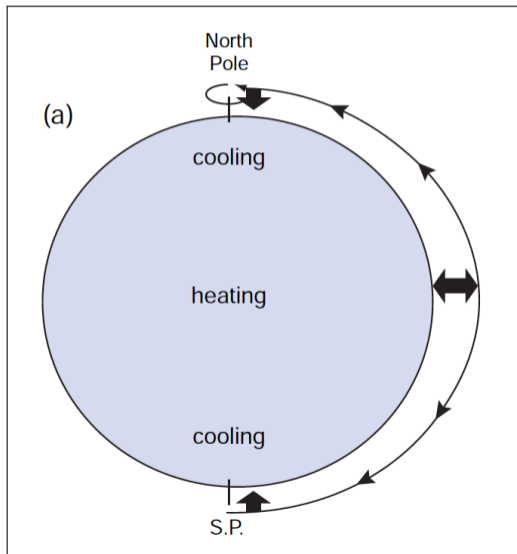
donde $\kappa = R/c_p = 0.286$ ($\rightarrow 2/7$).

- El término en ω describe expansiones/compresiones adiabáticas. Contribuye con $15^\circ\text{C}/\text{dia}$ en la tropósfera media $\omega \sim 100 \text{ hPa}/\text{dia}$ a $p = 500 \text{ hPa}$.
- El término J considera radiación solar, transferencia radiativa infrarroja, calor latente y reacciones químicas. Un orden de magnitud menor que el término adiabático, $J/c_p \sim 1^\circ\text{C}/\text{dia}$, con valores más altos en regiones pequeñas con liberación de calor latente.

6. Circulación atmosférica

- ▶ La circulación de vientos es promovida por los procesos de intercambio de energía en la atmósfera, conforme a las leyes de conservación de masa, momento y energía.

6. Circulación atmosférica - calentamiento solar diferencial



- ▶ El calentamiento diferencial a distintas latitudes promueve la circulación de aire hacia los polos y el ensanchamiento de la atmósfera en el ecuador,

$$H = RT/g.$$

- ▶ Por continuidad hay un descenso de aire en los polos y se establece una corriente de aire de retorno a baja altura.

6. Circulación atmosférica - calentamiento solar por latitudes

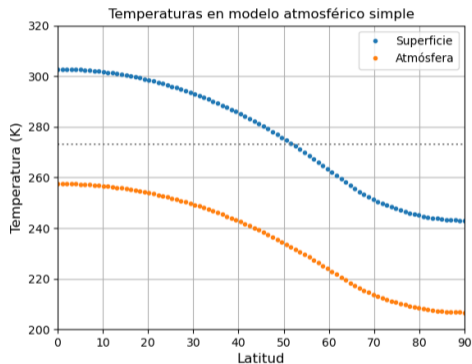
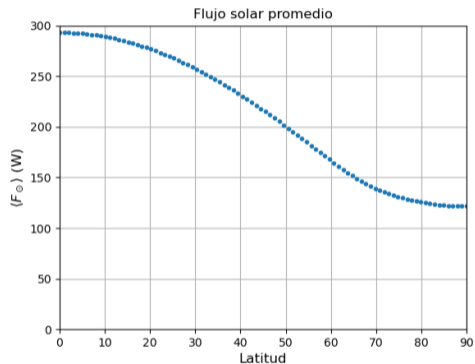
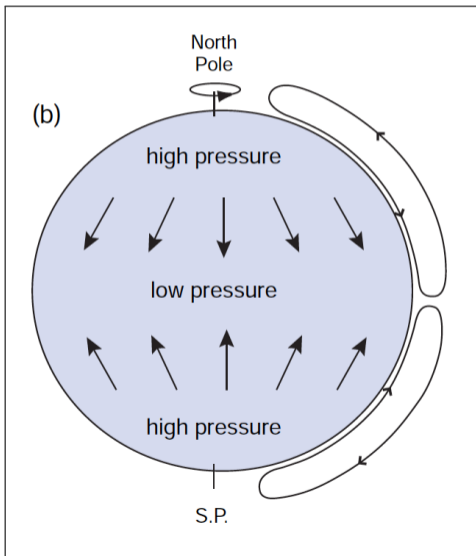


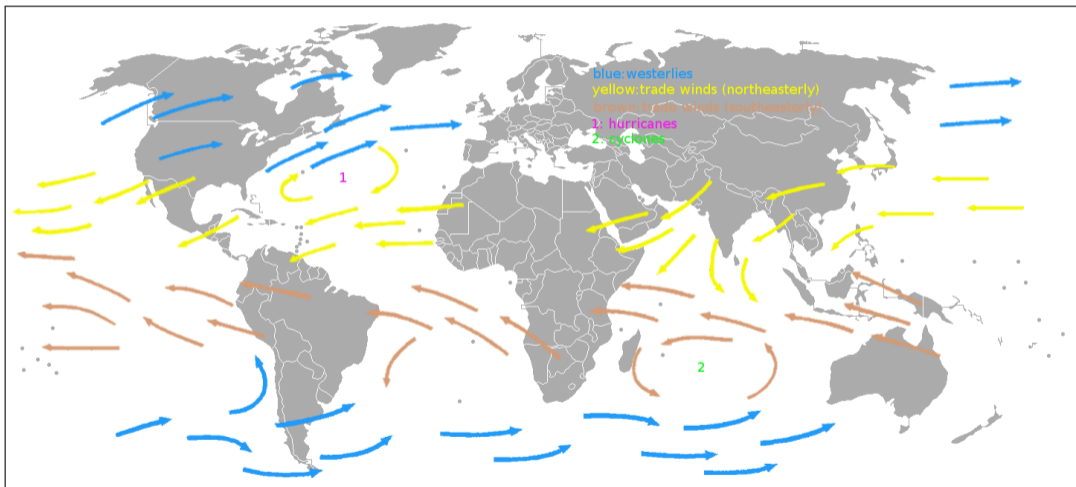
Figura 5: *Izquierda*: flujo solar en función de la latitud, considerando la inclinación del eje de la Tierra y el albedo, con un promedio anual de $0.7 F_{\odot}/4$. *Derecha*: temperaturas de la superficie y de la atmósfera de acuerdo al modelo atmosférico simple (§ 1), suponiendo el flujo solar de la figura de la izquierda para cada latitud.

6. Circulación atmosférica - circulación de vientos, v_0

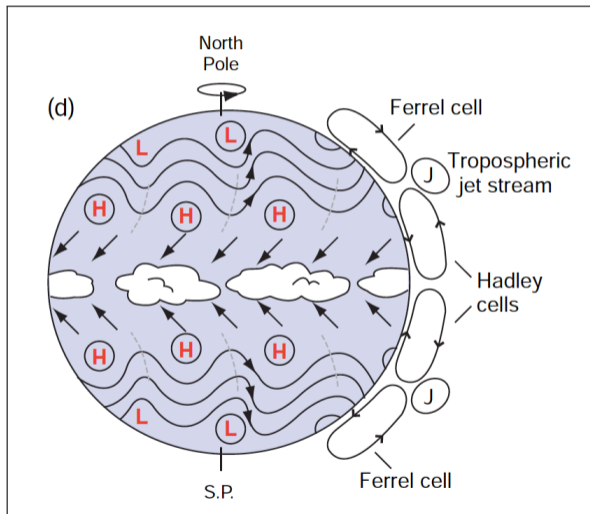


- ▶ La circulación vertical y en latitud del aire da lugar a una mayor presión a altas latitudes que en el ecuador.
- ▶ A baja altura la circulación es hacia el ecuador.
- ▶ El flujo de aire descendente en los polos promueve la formación de los vórtices polares.

6. Circulación atmosférica - vientos alisios



6. Circulación atmosférica - inestabilidad baroclínica



- ▶ El shear vertical perturba el flujo dando lugar a inestabilidades baroclínicas.
- ▶ **Inestabilidades baroclínicas** dan lugar a regiones de alta presión en latitudes tropical y baja presión en latitudes altas, con vientos hacia el Este en latitudes bajas.
- ▶ La circulación en el plano vertical se divide en las celdas de Hadley y de Ferrel, con el jet stream entre ellas, a 200 mb.

6. Circulación atmosférica - escala global

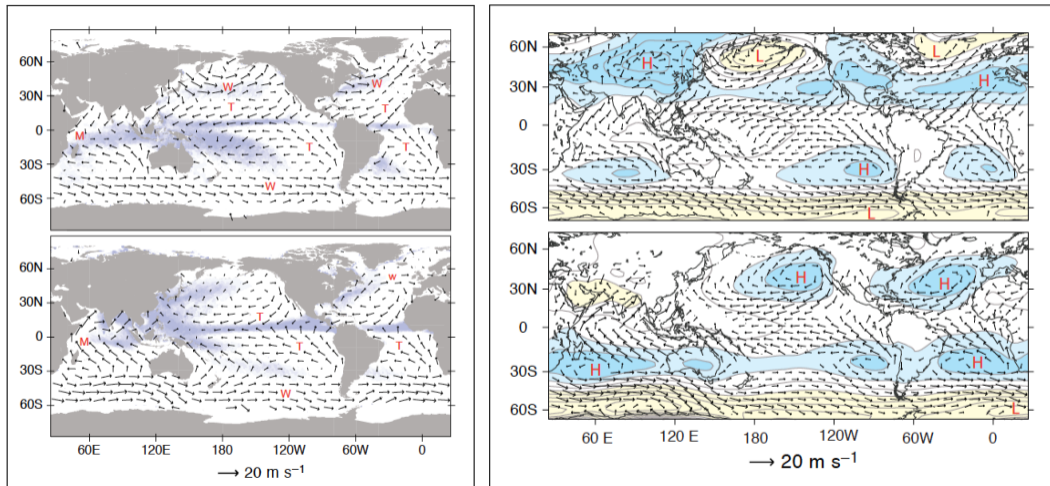


Figura 6: Izquierda: mapas de la circulación de vientos superficiales a escala global en diciembre - febrero (arriba) y junio - agosto (abajo). Derecha: se sobre-imponen curvas de presión.

6. Circulación atmosférica - intercambio de calor

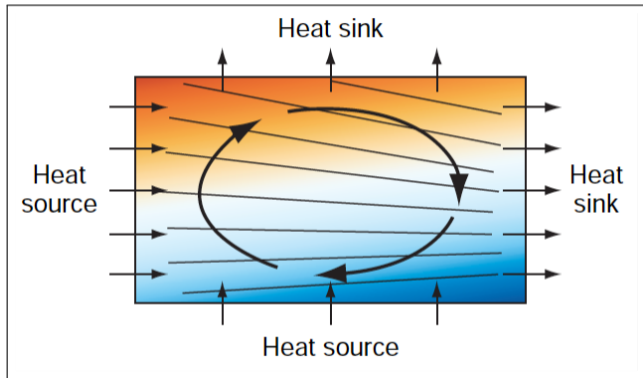
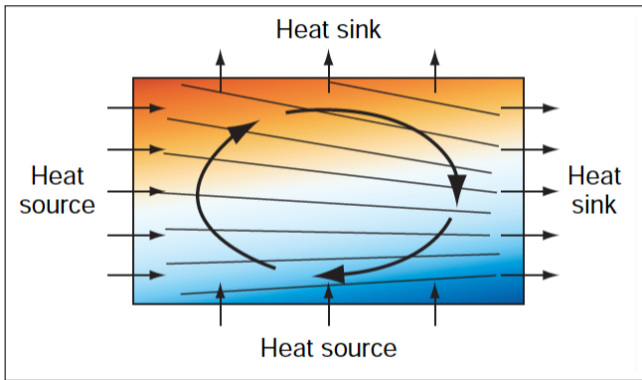


Figura 7: Circulación atmosférica por fuentes y sumideros de calor. Distribución de temperatura en color, con aire frío y denso en azul. Las líneas con pendiente son isobaras. El flujo sigue el gradiente horizontal de presión. Fig. 7.23 W&H.

6. Circulación atmosférica - intercambio de calor y trabajo termodinámico



- ▶ La circulación atmosférica trabaja como un ciclo termodinámico.
- ▶ El cambio de energía cinética viene dado por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\vec{V} \cdot \nabla \Phi + \vec{F} \cdot \vec{V},$$

donde el término de fricción mantiene los vientos por debajo del nivel geotrófico.

6. Circulación atmosférica - eficiencia termodinámica

- ▶ La atmósfera interpretada como máquina térmica tiene una eficiencia baja,

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \lesssim 1\%,$$

- con W : trabajo manifestado como energía cinética en vientos,

$$W \lesssim 2 \text{ W/m}^2;$$

- Q_H : diferencia de calor entre calentamiento infrarrojo en la superficie y cerca del ecuador; y, el sumidero, enfriamiento radiativo y liberación de calor latente en la tropósfera alta,

$$Q_H \sim 240 \text{ W/m}^2.$$

6. Circulación atmosférica - ciclo de energía

