

Notas de Física General
Cursos propedeúticos INAOE

Alberto Carramiñana
con contribuciones de Francisco Soto y Eduardo de la Fuente

17 de julio de 2008

Índice general

1. Mecánica clásica	1
1.1. Cinemática	1
1.1.1. Posición, coordenadas, trayectoria	1
1.1.2. Trayectoria	3
1.1.3. Velocidad y movimiento rectilíneo uniforme	4
1.1.4. Aceleración y caída libre	4
1.1.5. Movimientos armónicos	5
1.2. Dinámica	6
1.2.1. Primera ley de Newton	6
1.2.2. Segunda ley de Newton	6
1.2.3. Tercera ley de Newton	7
1.2.4. Fuerzas básicas	7
1.2.5. Partícula libre	7
1.2.6. Caída libre	7
1.2.7. Caída libre con resistencia del aire	8
1.2.8. Oscilador armónico	8
1.2.9. Dinámica de un movimiento circular uniforme	8
1.3. Energía mecánica	9
1.3.1. Energía cinética	9
1.3.2. Trabajo de una fuerza	9
1.3.3. Fuerzas y campos conservativos	10
1.3.4. Energía potencial y conservación de energía mecánica	10
1.4. Sistemas de partículas	11
1.4.1. Sistema de dos partículas	11
1.4.2. Momento lineal	12
1.4.3. Colisiones entre dos partículas	12
1.4.4. Sistemas de N partículas y sólidos	12
1.5. Rotación	13
1.5.1. Posición, velocidad y aceleración angular	13

1.5.2.	Dinámica rotacional	14
1.6.	Gravitación	16
1.6.1.	Ley de la gravitación universal	16
1.6.2.	Energía gravitacional y velocidad de escape	17
1.6.3.	Leyes de Kepler	18
1.6.4.	Problemas de dos cuerpos, campo central y de Kepler	20
1.6.5.	Parámetros orbitales	25
2.	Termodinámica y mecánica estadística	27
2.1.	Definiciones	27
2.2.	Ley cero de la termodinámica: temperatura	28
2.2.1.	Escalas de temperatura	29
2.3.	Ecuación de estado y gas ideal	30
2.4.	Primera ley de la termodinámica: calor y energía	31
2.4.1.	Trabajo termodinámico	31
2.4.2.	Enunciado de la primera ley	32
2.4.3.	Algunos procesos termodinámicos para un gas ideal	33
2.5.	Teoría cinética de gases ideales	33
2.5.1.	Presión de un gas ideal	34
2.5.2.	Distribución de velocidades y energías	34
2.6.	Entropía: segunda y tercera leyes de la termodinámica	35
2.6.1.	Entropía y segunda ley	35
2.6.2.	Tercera ley y el cero absoluto	36
3.	Electricidad y magnetismo	37
3.1.	Carga eléctrica	37
3.2.	Campos eléctricos	38
3.3.	Ley de Gauss	38
3.4.	Potencial eléctrico	39
3.5.	Circuitos	39
3.6.	Campos magnéticos	39
3.7.	Inducción de campos eléctricos y magnéticos	40
3.8.	Ecuaciones de Maxwell	40
3.9.	Campos electromagnéticos	40
4.	Mecánica Cuántica	41
4.1.	Radiación y el fotón	41
4.1.1.	Leyes de Kirchhoff	41
4.1.2.	Espectro de cuerpo negro e hipótesis de Planck	42
4.1.3.	Efecto fotoeléctrico	42

4.1.4.	Efecto Compton y momento de un fotón	43
4.2.	El átomo de Bohr	43
4.3.	Formalismo de la mecánica cuántica	45
4.3.1.	El formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica . .	45
4.3.2.	Fundamentos y ecuación de Schrödinger	46
4.3.3.	Aplicaciones básicas	47

Prólogo

Notas del curso propedeúutico de física general del posgrado del INAOE. Curso de 60 horas en 9 semanas, es decir 45 sesiones de una hora veinte minutos. El temario contempla cuatro temas generales: mecánica clásica (20 horas - 15 sesiones), termodinámica (15 horas - 12 sesiones), teoría electromagnética (15 horas - 12 sesiones) e introducción a la mecánica cuántica (10 horas - 7 sesiones), habiendo sido añadido el tema de teoría electromagnético (y las 15 horas respectivas) para el curso 2007. Idealmente los inscritos deben ser egresados de una carrera de física y tener conocimientos de estos temas, de manera que el curso sirva de repaso. También se busca que sean suficientemente explicativos para que aquellos estudiantes que no hayan estudiado el tema tengan una introducción que les de bases suficientes para llevar los cursos del primer año del posgrado de Astrofísica del INAOE. El curso está basado en una selección de temas de los libros de Resnick necesarios para poder continuar al posgrado de Astrofísica.

Las notas están incompletas y en elaboración. Se avanza a medida que avanza el curso.

Capítulo 1

Mecánica clásica

1.1. Cinemática

Resnick §2, 3 y 4.

1.1.1. Posición, coordenadas, trayectoria

Posición y coordenadas

La ubicación de un punto en el espacio se especifica mediante un vector de posición, \vec{r} , descrito por tres variables, generalmente $\{x, y, z\}$. Si definimos un origen de coordenadas y tres vectores *unitarios* fijos, $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, perpendiculares entre sí, podemos escribir

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (1.1)$$

que corresponde a la descripción de una posición en coordenadas cartesianas. Las tres coordenadas tienen unidades de longitud y la distancia del punto al origen de coordenadas es $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En ocasiones un sistema de coordenadas cartesiano no es el más apropiado y conviene usar otro tipo de coordenadas, como son las cilíndricas o esféricas.

Las coordenadas cilíndricas, $\{R, \varphi, z\}$, refieren la posición del objeto a su distancia a un eje de referencia (digamos \hat{z}) y la altura del punto con respecto al plano perpendicular a z ,

$$\vec{r} = R\hat{R} + z\hat{z}, \quad (1.2)$$

de donde la distancia del punto al origen es $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Las coordenadas cartesianas se relacionan con las cilíndricas mediante las ecuaciones de

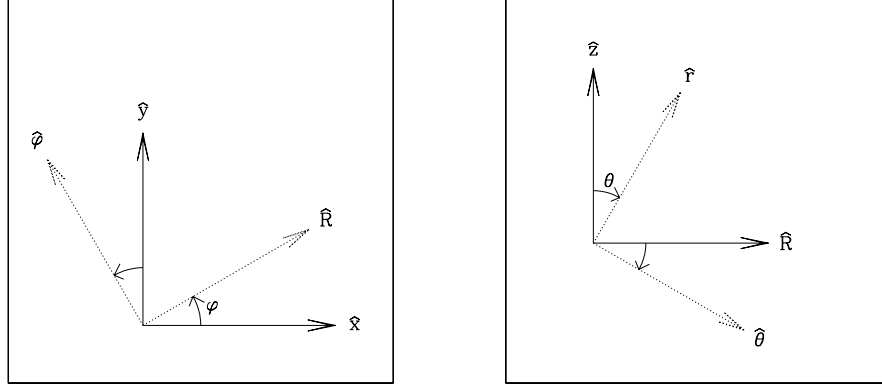


Figura 1.1: Diagramas básico de coordenadas polares.

transformación

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan(y/x). \end{cases} \quad (1.3)$$

La coordenada R es positiva ($R \geq 0$) y el ángulo acimutal φ cumple $0 \leq \varphi < 2\pi$. El precio a pagar por el uso de las coordenadas cilíndricas es que el vector unitario \hat{R} no es fijo, sino que depende de la posición. El vector unitario \hat{R} no es fijo y depende de la coordenada implícita φ de acuerdo a

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

según se ilustra en la figura 1.1. El vector $\hat{\varphi}$ es el unitario perpendicular a \hat{R} y a \hat{z} que completa la base ortonormal. Físicamente $\hat{\varphi}$ apunta en la dirección en la que crece el ángulo φ . La transformación entre vectores unitarios (ec. 1.4) y su inversa se pueden representar mediante matrices, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{R} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Las coordenadas esféricas, $\{r, \theta, \varphi\}$, emplean el vector unitario que une al origen con el punto en cuestión de forma que

$$\vec{r} = r \hat{r}. \quad (1.6)$$

Estas coordenadas se relacionan con las cilíndricas via $z = r \cos \theta$, $R = r \sin \theta$, o directamente con las cartesianas,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}, \quad (1.7)$$

donde el orden $\{r, \theta, \varphi\}$ es el adecuado para un sistema *diestro* de coordenadas y se tienen las condiciones ($0 \leq r$) y ($0 \leq \theta < \pi$). La transformación entre vectores unitarios es una combinación de rotaciones como la representada por (1.5),

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

con la transformación inversa dada por la matriz transpuesta. El término polar se refiere a la inhabilidad de estos sistemas de coordenadas de describir el origen sin ambigüedad. Si $x = 0, y = 0$ la variable φ no está definida; si además $z = 0$ entonces θ también esta indefinida.

En geografía y astronomía frecuentemente se usan sistemas de coordenadas polares para describir la posición de una punto sobre el globo terráqueo o la bóveda celeste. Estos miden uno de sus ángulos con respecto al ecuador, por lo que se denominan coordenadas *ecuatoriales*. En geografía se usa la longitud y latitud geográfica; en astronomía las coordenadas celestes usan la declinación, δ , y ascensión recta, α , donde las coordenadas del vector unitario correspondiente son,

$$x = \cos \delta \cos \alpha, y = \cos \delta \sin \alpha, z = \sin \delta. \quad (1.9)$$

La declinación mide el ángulo entre el punto y el ecuador celeste y la ascensión recta el ángulo entre la proyección del vector en el plano y la dirección del *punto vernal*. Otro sistema de coordenadas útil en astronomía son las coordenadas galácticas, referidas al plano de la Vía Láctea y la dirección del centro Galáctico.

1.1.2. Trayectoria

Una trayectoria es un conjunto continuo de posiciones en función del parámetro tiempo, $\vec{r}(t)$. La cinemática se encarga de la descripción del movimiento, caracterizando distintos tipos de trayectorias. Frecuentemente podremos simplificar la descripción a dos o una dimensiones, usando simplemente $x(t)$. La dinámica se encarga de describir las causas del movimiento y predecir las trayectorias dada una causa.

1.1.3. Velocidad y movimiento rectilíneo uniforme

La velocidad de una partícula (puntual) se define como la derivada de su trayectoria $\vec{r}(t)$,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right). \quad (1.10)$$

En coordenadas cartesianas se deriva cada una de las coordenadas,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z},$$

donde se introduce la notación $\dot{u} = du/dt$.

En coordenadas circulares debe uno tomar en cuenta que el vector unitario es función de la posición, y por tanto del tiempo. En el caso de coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt} \hat{R} + R \frac{d\hat{R}}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{z} = \dot{R} \hat{R} + R \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z},$$

donde se puede demostrar de (1.5) que $\dot{\hat{R}} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$, y $\dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi} \hat{R}$.

De la misma manera, en coordenadas esféricas se tiene

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad (1.11)$$

El movimiento rectilíneo uniforme corresponde a \vec{v} constante. Podemos integrar (1.10) para obtener

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}(0), \quad (1.12)$$

con $\vec{r}(0)$ un vector constante, determinado por las condiciones iniciales. La descripción del movimiento rectilíneo uniforme es más conveniente en coordenadas cartesianas.

1.1.4. Aceleración y caída libre

La aceleración es la derivada de la velocidad con el tiempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.13)$$

Nuevamente, en coordenadas cartesianas se deriva cada coordenada, mientras que en coordenadas circulares hay que considerar las derivadas de los vectores de base. Omitiré esta derivación.

Aceleración constante

Si \vec{a} es constante podemos integrar para obtener,

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0). \quad (1.14)$$

Un caso particular corresponde a la caída libre, donde $\vec{a} = -g\hat{z}$, con $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Si inicialmente $\vec{v}(0) = 0$, $\vec{r}(0) = h\hat{z}$ la ecuación de movimiento es

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

El objeto tarda un tiempo $t = \sqrt{2h/g}$ en caer.

Tiro parabólico

Es una generalización a dos dimensiones de la caída libre. Consideramos las condiciones iniciales $\vec{r} = h\hat{z}$ y $\vec{v} = v_0\hat{x}$. El movimiento resultante es uniforme en \hat{x} y caída libre en \hat{z} . Preguntas a considerar son la distancia horizontal recorrida y el tiempo de caída, comparado a caída libre.

Una variante es considerar un lanzamiento con dirección arbitraria, $\vec{v} = v_0(\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)$ y buscar la distancia recorrida, el tiempo de caída y el valor de θ que maximiza -o minimiza- estas cantidades.

1.1.5. Movimientos armónicos

Movimiento armónico en una dimensión

Comúnmente planteado por la relación $a = -\omega^2 x$, ecuación diferencial de segundo orden que tiene como solución funciones armónicas de tipo $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Estas funciones son periódicas, repitiendo sus valores cada intervalo de tiempo $P = 2\pi/\omega$, denominado el periodo del sistema.

Circular uniforme

Este es un movimiento en dos dimensiones resultante de superponer dos movimientos armónicos en x y en y de misma amplitud, como

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad y(t) = A \sin(\omega t). \quad (1.15)$$

Si $x(t)$ y $y(t)$ están desfasados 90° , como en (1.15), la trayectoria descrita es un círculo de radio A , ya que $x^2 + y^2 = A^2$, independiente de t . Si derivamos dos veces esta ecuación obtenemos $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, como en el oscilador armónico unidimensional. Una relación (escalar) útil a demostrar es $a = v^2/r$.

La cantidad ω se denomina *velocidad angular*, siendo $P = 2\pi/\omega$ el tiempo requerido para recorrer la circunferencia.

1.2. Dinámica

Resnick §5 y 6.

1.2.1. Primera ley de Newton

Primera ley de Newton: *en ausencia de fuerzas externas, un objeto permanece en estado de movimiento rectilíneo uniforme.*

La tendencia de un cuerpo a permanecer en movimiento uniforme es su inercia. Si la primera ley es válida en un marco de referencia O también es válida para cualquier marco de referencia O' que se mueve a velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme) con respecto a O . Esta propiedad define -de manera un poco circular- a los *marcos de referencia inerciales* como aquellos en los cuales un objeto que no experimenta fuerzas externas se mueve de manera rectilínea uniforme. De aquí un enunciado alternativo:

Si la fuerza total actuando sobre un objeto es cero, es posible encontrar un conjunto de marcos de referencia en los que este objeto no tiene aceleración.

En la práctica es difícil (por no decir imposible) encontrar un marco de referencia *exactamente* inercial. Un coche tomando una curva es un ejemplo claro de un marco no inercial. La Tierra es una mejor aproximación, pero un objeto en la Tierra experimenta fuerzas no inerciales debido a la gravedad y a la rotación de la misma. Si hacemos abstracción de estas, el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol induce fuerzas no inerciales, etc. . . Es posible medir la velocidad de la Tierra con respecto al fondo de microondas; este podría ser *el* marco de referencia inercial de referencia, siempre y cuando el centro de masa de la materia del Universo no se mueve con respecto a este sistema - según el principio de Mach.

1.2.2. Segunda ley de Newton

Primero deberíamos definir que es una fuerza. Una fuerza es una causa de movimiento, o más precisamente de modificar la inercia. En términos mundanos la acción de jalar o empujar corresponde a aplicar una fuerza. Si pensamos en jalar un resorte duplicar la fuerza corresponde a duplicar cuanto se estira el resorte. La segunda ley de Newton define a una fuerza como una causa de aceleración:

Segunda ley de Newton: *la fuerza externa total que actúa sobre un objeto es proporcional al producto de la masa por la aceleración resultante.*

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.16)$$

Un punto importante es que la fuerza solo puede depender de la posición del objeto, su velocidad y del tiempo, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. La ecuación (1.16) describe una ecuación diferencial de segundo grado a resolver para encontrar la trayectoria $\vec{r}(t)$, la cual requiere dos condiciones iniciales (vectoriales) para estar completamente definidas.

1.2.3. Tercera ley de Newton

Tercera ley de Newton: si A ejerce sobre B una fuerza \vec{F}_{AB} entonces B ejerce sobre A una fuerza de misma magnitud y dirección opuesta,

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (1.17)$$

1.2.4. Fuerzas básicas

En la práctica queremos estudiar el movimiento relacionado con algunos tipos de fuerza.

1.2.5. Partícula libre

Se define la partícula libre como aquella que no está sujeta a fuerzas externas, $\vec{F} = 0$, de donde se sigue

$$\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0,$$

consistentemente con la primera ley.

1.2.6. Caída libre

Cerca del suelo la fuerza de gravedad puede escribirse como $\vec{F} = m\vec{g}$, con $\vec{g} = -g\hat{z}$. De aquí se sigue $\vec{a} = \vec{g}$ que tiene como solución general el movimiento de tiro parabólico,

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}g\hat{z}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

Una sutileza dentro de este problema es el hecho de que la masa involucrada en la fuerza de gravedad, $m\vec{g}$, a veces denominada “masa gravitacional” es la misma que en la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, denominada “masa inercial”. La igualdad de estas dos definiciones de masas da lugar al *principio de equivalencia*, uno de los sustentos de la relatividad general.

1.2.7. Caída libre con resistencia del aire

La resistencia de un medio al movimiento puede representarse con una fuerza opuesta a la velocidad, de la forma $\vec{F} = -b\vec{v}$. Si pensamos en un movimiento puramente vertical, bajo la influencia de la gravedad, la segunda ley de Newton nos da

$$ma = -mg + bv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + \frac{b}{m}v,$$

donde hemos puesto $\vec{v} = -v\hat{z}$, siendo v la velocidad de caída. Primero notamos que la aceleración es nula (la velocidad es constante) si $v = mg/b$, siendo esta la denominada velocidad terminal (alrededor de 60 m/s para una persona - sin paracaídas).

La solución formal de la ecuación es

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v - mg/b} = \int_0^t \frac{b}{m} t' \Rightarrow v(t) = v_0 e^{bt/m} + \left(\frac{mg}{b}\right) (1 - e^{bt/m}).$$

1.2.8. Oscilador armónico

El oscilador armónico en una dimensión corresponde a una fuerza $F = -kx$, la cual da lugar a un movimiento armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$.

Un problema relacionado es el del péndulo. Las fuerzas involucradas con la gravedad y la tensión de la cuerda o varilla que retiene a la masa m ,

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}. \quad (1.18)$$

Usando coordenadas polares, y observando que la tensión restringe la masa m a no tener movimiento radial (solo angular) tenemos que si $\vec{r} = \ell\hat{r}$, siendo ℓ la longitud de la cuerda o varilla, entonces $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\theta}$ y $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}$. Las dos componentes, radial y tangencial de la ecuación de movimiento (1.18) quedan como,

$$0 = -T + mg \cos \theta, \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta. \quad (1.19)$$

En el caso particular de ángulos pequeños, $\theta \ll 1$ (¡en radianes!), la expresión (1.19) se aproxima a la del oscilador armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

1.2.9. Dinámica de un movimiento circular uniforme

Procedemos al revés. Suponemos que se cumple la relación (1.15) e inferimos $\vec{F} = -(mv^2/r)\hat{r}$, la fuerza es radial. Fuerzas responsables de un movimiento circular se denominan fuerzas centrípetas.

1.3. Energía mecánica

Resnick §7 y 8.

1.3.1. Energía cinética

Definimos la energía cinética como

$$E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2. \quad (1.20)$$

De acuerdo a esta definición, si $v = |\vec{v}|$ es constante la energía cinética es constante; se requiere una fuerza para lograr un cambio de energía cinética. Pero no toda fuerza da lugar a un cambio en v : una fuerza perpendicular a \vec{v} da lugar a un movimiento circular uniforme, en el cual v es constante. Dicho de otra forma, si $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ no hay un cambio de energía cinética.

1.3.2. Trabajo de una fuerza

Para modificar la energía cinética se requiere que una fuerza \vec{F} realice un trabajo W definido como

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.21)$$

definiendo la potencia como su derivada con el tiempo,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.22)$$

Estas definiciones cumplen con $W = 0$ y $P = 0$ si $\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}/dt = 0$. A manera de ejemplo, consideramos una fuerza constante actuando desde una posición inicial (i) a una final (f), $x_i \rightarrow x_f$. La integral (1.21) se hace de manera directa, dando $W = ma(x_f - x_i)$. Siendo la fuerza, y por tanto la aceleración constante, tenemos $v_f = v_i + a(t_f - t_i)$ de donde se obtiene $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$. A partir de esto se tiene que

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_c.$$

La igualdad $W = \Delta E_c$ se conoce como el *teorema de trabajo - energía*. La demostración se puede hacer formalmente para cualquier tipo de fuerza,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int d \left[\frac{1}{2}mv^2 \right] = \Delta E_c. \quad (1.23)$$

1.3.3. Fuerzas y campos conservativos

Definimos una fuerza conservativa como aquella que se puede escribir de la forma

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}), \quad (1.24)$$

siendo U la energía potencial, o simplemente “el potencial”. Esta definición indica también que la fuerza es función explícita de la posición, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, independientemente de la velocidad y el tiempo. Empleando ésta definición tenemos

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \nabla U \cdot d\vec{r} = -\Delta U.$$

Para una fuerza conservativa el trabajo es igual al negativo del cambio de energía potencial. Se sigue que en un campo conservativo W no depende de la trayectoria, solo de los puntos inicial y final; en particular, una fuerza conservativa no realiza trabajo neto en una trayectoria cerrada. Ejemplos de fuerzas conservativas, que se derivan de un potencial, son la de un resorte, derivada de $U = kr^2/2$, y la gravedad, derivada del potencial $U = mgz$.

Un ejemplo de fuerza *no conservativa* es la fricción dinámica, fuerza ejercida en resistencia al movimiento. Como se ejemplifica en el Halliday & Resnick, al mover un objeto describiendo un círculo en una mesa con fricción, el trabajo realizado en un ciclo no es nulo, ya que $F \cdot \vec{v}$ nunca cambia de signo, y por tanto $W \neq 0$.

1.3.4. Energía potencial y conservación de energía mecánica

Combinando $W = -\Delta U$ con el teorema de energía-momento podemos definir la energía mecánica como la suma de la cinética y potencial,

$$E = E_c + U. \quad (1.25)$$

Así bajo un campo conservativo la energía mecánica es constante y el trabajo mide la transferencia de energía potencial a cinética. La conservación de la energía mecánica se da en campos conservativos y se puede expresar como

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}), \quad (1.26)$$

con $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Así expresamos la conservación de la energía mecánica en algunos sistemas:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad \text{oscilador armónico 1D} \quad (1.27)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz, \quad \text{gravedad} \quad (1.28)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad \text{campo gravitacional.} \quad (1.29)$$

Frecuentemente se debe considerar el término cinético en coordenadas cilíndricas o esféricas,

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

En sistemas no conservativos la energía mecánica no se conserva; se transforma en otro tipo de energía, como por ejemplo en energía térmica (calor), conservándose la energía total (= mecánica + térmica + interna + radiativa), de acuerdo al principio universal de conservación de energía.

1.4. Sistemas de partículas

(*Resnick* §9)

Hasta aquí hemos considerado partículas puntuales, sin estructura y caracterizadas únicamente por su masa m . En general es necesario considerar la estructura de los sistemas físicos, descritos como la aglomeración de varias partículas individuales o mediante una distribución de masa, $\rho(\vec{r})$.

1.4.1. Sistema de dos partículas

(*Resnick* §9.1 - *fig. 1*).

El sistema compuesto más sencillo está formado por dos masas puntuales, m_1 y m_2 , con posiciones $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$. Estas partículas tienen trayectorias definidas por las fuerzas mutuas -o internas- y las fuerzas externas. Para separar los efectos de fuerzas internas y externas conviene definir las posiciones relativa \vec{r} y de centro de masa \vec{r}_{cm} como

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.30)$$

La transformación inversa es

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{cm} - (m_2/M)\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} + (m_1/M)\vec{r}, \quad (1.31)$$

con $M = m_1 + m_2$ la masa total del sistema. Podemos anticipar que las fuerzas externas afectan a \vec{r}_{cm} mientras que las fuerzas internas afectan a \vec{r} . En particular la fuerza externa total sobre estas dos partículas es

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ex,1} + \vec{F}_{ex,2} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = M\vec{a}_{cm}.$$

Consecuentemente, en ausencia de fuerzas externas el centro de masa de un sistema de partículas sigue un movimiento rectilíneo uniforme.

La energía cinética de un sistema de dos partículas se expresa directamente en términos de las coordenadas relativa y del centro de masa,

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.32)$$

donde

$$m \equiv \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (1.33)$$

es la *masa reducida* del sistema.

1.4.2. Momento lineal

El momento lineal de una partícula de masa m está dado por $\vec{p} = m\vec{v}$. Para un sistema de partículas $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_{cm}$ y la segunda ley de Newton se expresa como $\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt$, siendo \vec{P} una cantidad conservada en ausencia de una fuerza externa neta.

1.4.3. Colisiones entre dos partículas

(*Resnick* §10)

Al considerar la colisión entre dos partículas tenemos como primera condición la conservación de momento antes (i) y después (f) de la colisión

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}.$$

Podemos encontrar las condiciones finales en términos de las condiciones iniciales imponiendo una condición a la energía mecánica: si la energía mecánica se conserva tenemos una colisión elástica; si la energía mecánica no se conserva (transformándose en calor, por ejemplo) tenemos una colisión inelástica.

1.4.4. Sistemas de N partículas y sólidos

Para N partículas la definición del centro de masa se generaliza a

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{\sum m_i}.$$

La Fuerza externa satisface la segunda ley de Newton para el centro de masa de un sistema de partículas, $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$. Para un cuerpo sólido el centro de masa está determinado por la densidad de masa ρ según

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV, \quad (1.34)$$

donde $M = \int \rho dV$. \vec{r}_{cm} viene siendo la posición promediada por la distribución de masa, siendo $M\vec{r}_{cm}$ el primer momento de la distribución de masa. Se puede definir de manera análoga el momento de inercia como el segundo momento de la distribución de masa,

$$I_{ab} = \int (r^2 \delta_{ab} - x_a x_b) \rho dV$$

donde a y b son alguna de $\{x, y, z\}$ y $I_{xx} = \int \rho(y^2 + z^2) dV$. I se relaciona directamente con la rotación del sistema y se puede reducir a un escalar al definirse un eje de rotación.

1.5. Rotación

(Resnick §11, 12 y 13.)

Al considerar un movimiento circular, ya sea uniforme o no uniforme, conviene hacer la descripción cinemática y dinámica en términos de variables angulares, análogas a las lineales definidas en los capítulos §1 y §2.

1.5.1. Posición, velocidad y aceleración angular

En §1 definimos las coordenadas cilíndricas con la relación,

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi,$$

donde el ángulo φ indica la posición angular del punto en cuestión. La velocidad y aceleración angular se definen como las derivadas de esta cantidad

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Pensando en términos de una rotación en el plano xy , la velocidad lineal cumple

$$\vec{v} = -R \sin \varphi \omega \hat{x} + R \cos \varphi \omega \hat{y} = \omega(-y \hat{x} + x \hat{y}), \quad (1.35)$$

que se puede escribir como $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ describiendo a la velocidad angular como un vector a lo largo del eje \hat{z} , es decir $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. La aceleración angular es también una cantidad vectorial, dada por

$$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}.$$

En particular, en un movimiento circular *uniforme* tenemos $v = \omega r$, $a = \omega^2 r$.

1.5.2. Dinámica rotacional

Energía cinética rotacional

Pensando en un cuerpo sólido, la energía cinética del mismo está dada por la suma de las energías cinéticas de cada punto i , el cual se mueve con una velocidad $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,cm}$. Es decir

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{i,cm} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,cm}^2 \\ &= \frac{v_{cm}^2}{2} \sum_i m_i + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{i,cm} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde usamos $M = \sum m_i$, $\sum m_i \vec{v}_{i,cm} = d(\sum m_i \vec{r}_{i,cm})/dt = 0$, usando la definición de centro de masa, y definiendo el momento de inercia I a través de la relación

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,cm}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,cm})^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega^2,$$

es decir

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \rightarrow \int \rho r_{\perp}^2 dV, \quad (1.37)$$

donde $r_{i\perp}$ se refiere a la distancia del punto i al *eje de rotación* y la flecha indica la expresión correspondiente a una distribución continua de masa. La expresión (1.36) indica que la energía cinética de un cuerpo sólido puede separarse en un término de centro de masa, o *translacional*, mas un término rotacional. Dentro de la energía cinética rotacional el momento de inercia es análogo a la masa dentro de la inercia translacional.

Momento de inercia

Independientemente de si la rotación es alrededor del centro de masa o no, el momento de inercia se calcula con respecto al eje de rotación. Así, si consideramos un objeto girando alrededor del eje z tenemos

$$I = \int \rho r_{\perp}^2 dV = \int (x^2 + y^2) \rho dV, = \int R^2 \rho R dR d\varphi dz,$$

sugiriendo la fórmula el uso de coordenadas cilíndricas $\{R, \varphi, z\}$.

Supóngase que conocemos el momento de inercia I referido a un eje que pasa por el centro de masa, digamos \hat{z} , y queremos calcularlo para un eje paralelo a \hat{z} . Si h es la distancia entre estos ejes tenemos

$$\begin{aligned} I_h &= \sum_i r_{\perp}^2 \rho dV = \int \left((x-h)^2 + y^2 \right) \rho dV \\ &= \int (x^2 + y^2) \rho dV - 2h \int x \rho dV + h^2 \int \rho dV = I_{cm} + Mh^2, \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que el eje original correspondía a $x = y = 0$ y el paralelo a $x = h, y = 0$.

Algunos ejemplos de cálculos de momentos de inercia para distribuciones de masa o cuerpos sólidos de densidad ρ constante:

- una mancuerna:

tenemos dos masas idénticas de masa m unidas por una varilla sin masa de longitud ℓ . El momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la varilla está dado por

$$I = \sum_i \rho r_{\perp}^2 dV = m(\ell/2)^2 + m(\ell/2)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2.$$

- una esfera:

una esfera de radio R y masa M con densidad uniforme. El momento de inercia con respecto a un eje que pasa por su centro calculado en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 \rho dV = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{M}{4\pi R^3/3} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \\ I &= \left(\frac{M}{4\pi R^3/3} \right) \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}MR^2. \end{aligned}$$

- un cilindro sólido:

de radio R y altura h , con respecto a su eje axial, calculando en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 \rho dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h R'^2 \left(\frac{M}{\pi R^2 h} \right) R' dR' d\varphi dz, \\ I &= \frac{1}{2}MR^2. \quad (\text{indep de } h?) \end{aligned}$$

Momento angular y torca

Para una partícula puntual de masa m se define el momento angular como

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1.38)$$

Para un conjunto de partículas el momento lineal total es la suma de los momentos individuales

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i \quad \rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = I\vec{\omega} \quad (1.39)$$

donde la flecha indica que la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$ se aplica a un cuerpo sólido, en el cual $\vec{\omega}$ es la misma para todas las partículas. En este caso el momento angular adquiere una expresión análoga a la del momento lineal, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Para modificar el momento angular es necesario que una fuerza \vec{F} aplique una torca $\vec{\tau}$, definida como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

dando lugar a la versión rotacional de la segunda ley de Newton,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}. \quad (1.40)$$

En ausencia de torcas externas el momento angular total es una cantidad fija, incluso si el sistema no es un cuerpo rígido.

1.6. Gravitación

Resnick §14.

1.6.1. Ley de la gravitación universal

Enunciado

La fuerza gravitacional consiste en la atracción de dos objetos debido a sus masas, siendo proporcional a ellas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias,

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (1.41)$$

con

$$G = 6.674 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1}\text{cm}^3\text{s}^{-2} = 6.674 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$$

la constante universal de la gravitación. El signo $-$ indica una fuerza de atracción. Esta fuerza es conservativa y se deriva del potencial

$$\phi = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (1.42)$$

El principio de superposición

El principio de superposición dice que la fuerza gravitacional producida por dos masas (1,2) sobre una tercera (3) es la suma de las fuerzas individuales $\vec{F}_{1+2,3} = \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3}$. De ahí que sea posible calcular el campo gravitacional producido por una distribución arbitraria de masa. En particular, el campo de una distribución esféricamente simétrica de masa total M es equivalente al de una masa puntual M situada en el centro de la distribución.

Relación con la aceleración de la gravedad

Cerca de la Tierra, a una distancia $z \ll R_{\oplus}$ de la superficie,

$$\vec{F} = -\frac{GM_{\oplus}m}{(R_{\oplus} + z)^2} \simeq -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \hat{r} = -m\vec{g}, \quad (1.43)$$

de donde $\vec{g} = (GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2) \hat{r}$. Hay correcciones al valor de g debidas a que la Tierra no es perfectamente esférica, su distribución de masa no es uniforme y el efecto de la fuerza centrífuga¹ debida a la rotación de la Tierra.

1.6.2. Energía gravitacional y velocidad de escape

Supongamos que un objeto de masa m es lanzado radialmente con velocidad v desde una distancia r de una masa M . Siendo la interacción gravitacional conservativa, la energía mecánica de m

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (1.44)$$

se conserva. E tiene una contribución positiva (la energía cinética) y una negativa (la potencial) de manera que podemos tener $E < 0$, $E > 0$ y el caso límite $E = 0$. Si $E < 0$ podemos despejar la velocidad de (1.44), obteniendo

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2(-E)}{m}}.$$

¹vista desde un marco de referencia *no inercial* situado en el suelo.

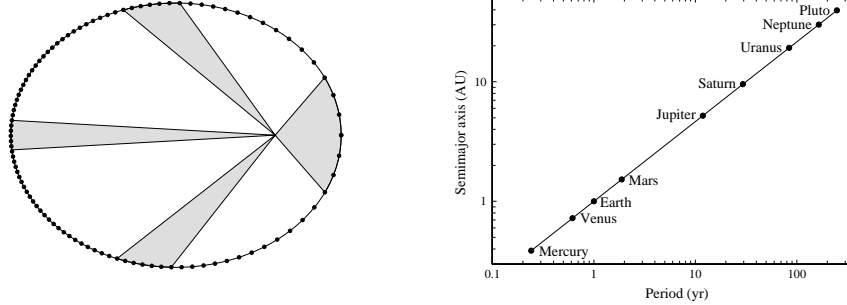


Figura 1.2: *Izquierda*: segunda ley de Kepler. Los puntos en la elipse representan posiciones separadas por un intervalo de tiempo fijo. *Derecha*: tercera ley de Kepler para los planetas del Sol. Figuras del libro de Carroll-Ostlie.

Dado el comportamiento de la función $1/r$, si $E < 0$ tenemos que el término dentro de la raíz es positivo para $r \rightarrow 0$ pero se anula para un valor finito de r , concretamente $r_0 = GMm/(-E)$. Esto indica que la masa m no puede alejarse más allá de r_0 , donde su velocidad radial es nula, siendo el sistema de las dos masas gravitacionalmente ligado. Si $E \geq 0$ la masa m puede alejarse hasta $r \rightarrow \infty$. El caso $E = 0$ define la velocidad necesaria para escapar de la masa M desde una distancia r , o velocidad de escape

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (1.45)$$

Como ejemplo, si $M = M_{\oplus} = 5.972 \times 10^{27}$ g, $r = R_{\oplus} = 6378$ km obtenemos la velocidad de escape de la Tierra, $v_{esc,\oplus} \simeq 11.2 \text{ km s}^{-1}$.

1.6.3. Leyes de Kepler

Enunciado de las leyes

La fuerza de gravedad gobierna el movimiento de los astros, en particular de los planetas. En el siglo XVI Copérnico propuso que los planetas giraban alrededor del Sol, ofreciendo una explicación cualitativa de los movimientos retrógrados de los planetas. A finales del siglo XVI Tycho Brahe dedicó buena parte de su vida a medir las posiciones de los planetas alcanzando una precisión de 4 minutos de arco. Con esos datos, Kepler intentó varios modelos heliocéntricos, como órbitas circulares con centros desplazados, hasta llegar a las siguientes leyes que gobiernan el movimiento planetario (Fig. 1):

1. *Primera ley de Kepler:* las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de los focos.
2. *Segunda ley de Kepler:* el vector que une al planeta con el Sol barren áreas iguales en tiempos iguales.
3. *Tercera ley de Kepler:* $P^2 = a^3$, siendo P el periodo en años y a la distancia media al Sol en unidades astronómicas.

Como se muestra en §1.6.4, estas leyes son consecuencia directa de las leyes de Newton. Podemos hacer algunas anotaciones con respecto a estas leyes.

Órbitas elípticas

La primera anotación se refiere a la diferencia entre un elipse referida a su centro o a uno de sus focos. La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos (los focos) es igual a constante,

$$\left[(x - c)^2 + y^2\right]^{1/2} + \left[(x + c)^2 + y^2\right]^{1/2} = 2a,$$

que resulta en la ecuación canónica de una elipse,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{(1 - e^2)a^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}},$$

donde los focos están situados en $\{x = \pm c, y = 0\}$ y la excentricidad es $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$; a representa al semieje mayor y b al semieje menor (suponiendo $a > b$). El lado derecho indica la expresión correspondiente a $r(\varphi)$ en coordenadas polares. Referido a uno de los focos, digamos $x = +c = ea$, la ecuación de la elipse se obtiene de

$$\left[(x - 2c)^2 + y^2\right]^{1/2} + \left[x^2 + y^2\right]^{1/2} = 2a,$$

la cual en coordenadas polares resulta en,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}. \quad (1.46)$$

Áreas barridas

Supongamos dos vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 siendo $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, según se ilustra en la figura 1.3. Se puede ver que el área del triángulo que enmarcan estos

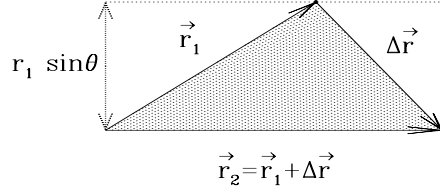


Figura 1.3: El área del triángulo definido por dos vectores es la mitad del área del rectángulo, dada a su vez por $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|$.

vectores viene siendo la mitad de la del rectángulo de lados $|\vec{r}_1| \sin \alpha$ y $|\vec{r}_2|$, siendo α el ángulo entre los vectores. En otras palabras

$$A = \frac{1}{2} |\vec{r}_2| |\vec{r}_1| \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \frac{1}{2} |\vec{r}_1 \times \Delta \vec{r}|,$$

de donde se desprende

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}, \quad (1.47)$$

donde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es el momento angular.

1.6.4. Problemas de dos cuerpos, campo central y de Kepler

- El problema de dos cuerpos se refiere a la interacción de dos masas puntuales a través de una fuerza mutua $\vec{F} = -\nabla U$.
- El problema de una fuerza central es aquel donde $\vec{F} = \vec{F}(r)$.
- En el caso específico de la interacción gravitacional se habla del problema de Kepler.

Problema de dos cuerpos

El problema de dos cuerpos se simplifica cambiando de las coordenadas de ambas masas $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ a la del centro de masa y distancia relativa $\{\vec{r}_{cm}, \vec{r}\}$, usando las relaciones (1.31)

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}_{cm}, \vec{r}), \quad (1.48)$$

con $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, la masa reducida. Si U es solamente función de \vec{r} , y no de \vec{r}_{cm} , es decir $U(\vec{r}_{cm}, \vec{r}) = U(\vec{r})$, la fuerza resultante corresponde a una interacción la mutua entre las dos partículas, sin fuerzas externas al sistema. En consecuencia $\vec{F}_{ext} = 0$ y el centro de masa tiene movimiento rectilíneo uniforme, siendo $Mv_{cm}^2/2$ una constante. La energía total puede escribirse como $E = E_{cm} + E_{int}$ donde

$$E_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \text{cte}, \quad E_{int} = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = \text{cte}, \quad (1.49)$$

siendo el valor de E_{int} el que determina si el sistema es libre ($E_{int} > 0$) o ligado ($E_{int} < 0$).

Otra cantidad física que amerita consideración es el momento angular. En el problema de dos cuerpos tenemos

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 &= m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2, \\ &= M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

En el problema general de dos cuerpos el momento angular asociado al centro de masa es constante al tener éste un movimiento rectilíneo uniforme.

Potencial central

El problema del potencial central es el caso particular del problema de dos cuerpos en el que el potencial U dependiente solamente de la distancia $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, es decir $U(\vec{r}) = U(r)$. Podemos concentrarnos en la componente interna de la energía,

$$E_{int} = E_{tot} - \frac{1}{2} M v_{cm}^2.$$

En el caso del potencial central además de que E_{int} es constante, la fuerza puramente radial $\vec{F} = \vec{F}(r)$ resulta en una torca nula, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, y la conservación del momento angular relativo, $d\vec{L}_{rel}/dt = 0 \Rightarrow \vec{L}_{rel} = \text{cte}$. La fuerza radial implica $\vec{a} \parallel \vec{r}$. Por tanto la aceleración \vec{a} está en el plano definido por \vec{r} y \vec{v} . Si estos tres vectores están en el mismo plano en un instante dado, es claro que permanecerán en él indefinidamente. En conclusión, el movimiento bajo un potencial central se restringe a un plano.

Dado que tenemos caracterizado el centro de masa, podemos dejarlo de lado en el análisis del movimiento relativo situándonos en un marco de referencial (inercial) en el cual $\vec{v}_{cm} = 0$ (o mejor aún, $\vec{r}_{cm}(t) = 0$), en cuyo caso $E_{int} = E_{tot}$ y $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{rel}$. Nombraremos a estas variables E y $\vec{\ell}$, que

escritas en coordenadas esféricas (1.11), adquieren las expresiones

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r), \quad (1.51)$$

$$\vec{\ell} = -mr^2\dot{\varphi} \sin \theta \hat{\theta} + mr^2\dot{\theta} \hat{\varphi}. \quad (1.52)$$

Sabiendo que el movimiento se da en un plano, fijamos $\theta = \pi/2$, de donde

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r), \quad \vec{\ell} = -mr^2\dot{\varphi} \hat{\theta}. \quad (1.53)$$

Nótese que si $\theta = \pi/2$ los vectores \hat{z} y $\hat{\theta}$ son antiparalelos, $\hat{\theta} = -\hat{z}$, explicando el signo negativo en $\vec{\ell}$ para una rotación con $\dot{\varphi} > 0$, alrededor de \hat{z} .

Comparando con ec. (1.47) vemos que la conservación del momento angular se traduce en la segunda ley de Kepler, la cual se cumple para *cualquier* potencial central.

Problema de Kepler

En el caso del problema de Kepler se busca la solución de (1.53) para $U = -GMm/r$. Es importante considerar que hemos reducido notablemente el problema: (i) de seis variables, (\vec{r}_1, \vec{r}_2) , a tres cambiando a las coordenadas de centro de masa y relativa, y mostrando que el centro de masa tiene un movimiento relativo uniforme; (ii) posteriormente reducimos de tres a dos dimensiones mostrando que el momento angular es constante, por lo que el movimiento se da en un plano y fijamos $\theta = \pi/2$. Nos faltan dos variables, $(r(t), \varphi(t))$, las cuales debe ser posible encontrar con las dos relaciones fundamentales que tenemos: las conservaciones de energía y momento angular,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{GMm}{r}, \quad \ell = mr^2\dot{\varphi}. \quad (1.54)$$

Antes de encontrar las soluciones en función del tiempo se puede mostrar dan lugar a las leyes de Kepler. Antes de eso podemos estudiar el movimiento radial, eliminando φ de la ecuación de energía,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (1.55)$$

que viene siendo un problema en una dimensión con un potencial efectivo,

$$U_e(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r},$$

graficado en la Figura 1.4. Este potencial tiene un mínimo en $r_0 = \ell^2/GMm^2$, donde $U_e = -(GM)^2/2(\ell/m)^2 = -GM/2r_0$. A partir de este punto y de la forma del potencial, $U_e \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$, podemos definir tres regímenes:

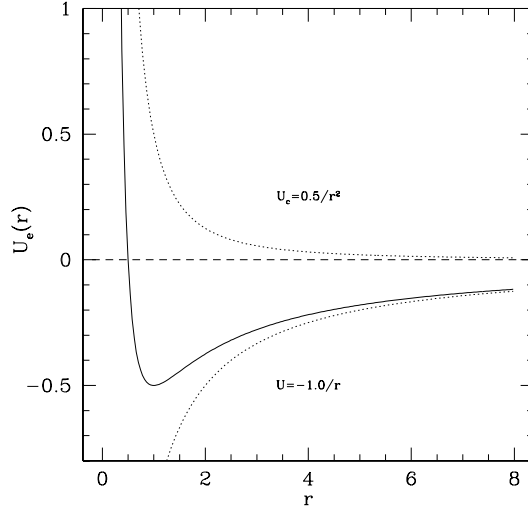


Figura 1.4: Potencial efectivo para el problema de dos cuerpos, en unidades arbitrarias. Las líneas punteadas indican el potencial Kepleriano y la contribución angular.

1. La solución con $E = -GM/2r_0$ tiene $\dot{r} = 0$ y por tanto corresponde a una órbita circular, siendo esta la configuración de menor energía mecánica.
2. Si la energía es superior a E_0 pero negativa, $E_0 < E < 0$, r está acotada entre las dos soluciones de $E = U_e(r)$; el resultado es que el movimiento está acotado por dos círculos, $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.
3. Si $E > 0$ entonces solo existe una cota interna y la distancia entre las dos partículas puede hacerse infinita. El movimiento solo está acotado interiormente.

Veamos estos casos con más detalle.

Órbita circular

Si $\dot{r} = 0$ y denotamos con a el radio de la órbita, tenemos

$$\epsilon = E/m = -\frac{GM}{2a}, \quad \lambda = \ell/m = \sqrt{GMa},$$

de donde podemos calcular la velocidad angular,

$$\lambda = a^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Esta relación corresponde con la tercera ley de Kepler, para el caso particular de órbitas circulares, que son a su vez un caso particular de órbitas elípticas.

Órbita elíptica

Podemos mostrar que una elipse es una trayectoria viable reemplazando el tiempo mediante $dt = (mr^2/\ell)d\varphi = r^2d\varphi/\lambda$,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\lambda}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{\lambda^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \quad (1.56)$$

para obtener la ecuación de una elipse referida a uno de sus focos (ec. 1.46) recordando que $\epsilon < 0$. La integración no es directa y procederemos mejor a reemplazar $r(\varphi)$ en (1.56), obteniendo las condiciones

$$\lambda = \sqrt{GMa(1 - e^2)}, \quad \epsilon = -\frac{GM}{2a}. \quad (1.57)$$

Estas pueden invertirse para encontrar el semieje mayor a y la eccentricidad e , dadas la energía y momento angular. Las órbitas elípticas son soluciones al problema de Kepler, corroborando la primera ley.

Órbitas parabólica e hiperbólica

La ecuación de la hipérbola, referida al foco interior, es

$$r(\varphi) = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos \varphi + 1},$$

con r definida positiva para $\cos \varphi > -1/e$. Si reemplazamos en la ecuación de energía (1.56), obtenemos basicamente las mismas relaciones que en el caso elíptico

$$\lambda = \sqrt{GMa(e^2 - 1)}, \quad \epsilon = GM/2a.$$

Al substituir la parábola de distancia focal p referida al foco

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

se obtiene $\lambda = \sqrt{GMp}$, $\epsilon = 0$.

Si bien la primera ley de Kepler se refiere a órbitas elípticas, las leyes de Newton también permiten órbitas parabólicas ($E = 0$) e hiperbólicas ($E > 0$). Estas se observan en cometas no periódicos.

A partir de la ecuación de la órbita y la conservación del momento angular es posible demostrar la tercera ley de Kepler, mediante la integral

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \left[\frac{a^3(1-e^2)^3}{GM} \right]^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2}.$$

En particular para una órbita circular $e = 0$, de donde

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}. \quad (1.58)$$

El coeficiente de proporcionalidad en la tercera ley de Kepler es la masa total del sistema. En el caso del sistema solar (o de las lunas de Júpiter) la masa del Sol es el término dominante .

Soluciones temporales al problema de Kepler

Una característica de la solución del problema de dos cuerpos es que no hay una expresión analítica para $r(t)$ y $\theta(t)$. La forma mas directa de la solución en función del tiempo es a través de la eccentricidad anómala ψ , la cual relaciona r y θ con t . Para órbitas elípticas las relaciones correspondientes son

$$\omega t = \psi - e \sin \psi, \quad r = a(1 - e \cos \psi) \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (1.59)$$

siendo $\omega = 2\pi/T = \sqrt{GM/a^3}$ la frecuencia angular.

1.6.5. Parámetros orbitales

La solución presentada para el problema de dos cuerpos define las órbitas elípticas con dos parámetros, el semieje mayor a y la eccentricidad, e , presuponiendo que el plano de movimiento es el plano xy y que el periastro, punto mínimo de r , se da en $\varphi = \pi$. Un tercer parámetro es la frecuencia angular, $\omega = \sqrt{GM/a^3}$, o el periodo que aquí denotaremos con P . Esta es una simplificación ya que se requieren 6 parámetros para especificar completamente una órbita orientada arbitrariamente en el cielo. Los parámetros empleados normalmente son: (i) el semieje mayor, a ; (ii) la eccentricidad, e ; (iii) la frecuencia angular ω , o el periodo, P ; (iv) la inclinación, i ; (v) la longitud del nodo ascendente, Ω ; (vi) la época de paso por el periastro, t_0 .

Sistema solar

Para una guía de cómo calcular las posiciones de los planetas vease la página www.davidcolarusso.com/astro/

Una referencia más completa, que considera las interacciones entre planetas está en <http://ssd.jpl.nasa.gov/?planets>

Plutón-Caronte

Desde su descubrimiento en 1930 hasta finales de los 1970s no se sabía prácticamente nada de Plutón. En 1979 se descubrió Caronte, una luna de tamaño apreciable. El descubrimiento de Caronte se dió en un momento muy oportuno, pocos años antes de una serie de eclipses mutuos entre Plutón y Caronte que ocurrieron entre 1985 y 1990. El estudio del movimiento de este sistema doble y de los eclipses permitieron determinar con precisión las masas y dimensiones de ambos objetos, siendo la de Plutón $2.1 \times 10^{-3} M_{\oplus}$. Este es uno de los mejores ejemplos de como el problema de dos cuerpos permitió elucidar la naturaleza de un cuerpo celeste.

Capítulo 2

Termodinámica y mecánica estadística

Resnick §19 a 21; García Colín §1.

2.1. Definiciones

Sistema termodinámico

porción del universo físico bajo estudio. Al ser una porción del universo es necesario incorporar el concepto de *frontera*, definida como el mecanismo que lo separa del resto del universo. La frontera puede estar constituida por las paredes de un contenedor o la superficie exterior del sistema.

Alrededores

parte del universo que interacciona con el sistema termodinámico. Generalmente se considera que los alrededores tienen dimensiones mucho mayores que las del sistema. También es necesario especificar la naturaleza de la frontera, o en otras palabras definir el método como interactúan el sistema y sus alrededores, como podrían ser paredes aislantes (sin interacción alguna), adiabáticas (impiden intercambio de calor), diatérmicas (no adiabáticas), permeables (permiten intercambio de partículas), impermeables, etc....

Equilibrio termodinámico

Necesitamos asociar a un sistema un conjunto de atributos macroscópicos medibles experimentales y a los cuales podemos asignar valores numéricos, como son la presión (p), el volumen (V), la tensión (\mathcal{T}), el

campo magnético (\mathcal{H}), etc... Estos atributos se denominan variables termodinámicas.

Un sistema se encuentra en estado de equilibrio termodinámico si las variables que describen a este estado tienen valores numéricos que no varían con el tiempo. La termodinámica clásica trata solamente sistemas en estado de equilibrio. La relación entre sistemas termodinámicos y sus alrededores idealmente se da en condiciones, que pueden ser distintas, de equilibrio termodinámico.

Estado termodinámico

Existe un subconjunto de las variables termodinámicas de las cuales pueden determinarse las demás variables. A las variables que forman este subconjunto se les denomina *grados de libertad* y un estado termodinámico queda definido por los valores numéricos de estos. Las variables termodinámicas cuyo valor depende del estado del sistema se denominan *variables de estado*. El ejemplo más común es el uso de presión y volumen para caracterizar el estado de un gas de una sola especie.

Las variables termodinámicas pueden distinguirse como *intensivas*, que son aquellas independientes del tamaño del sistema (por ejemplo la presión), y *extensivas*, aquellas que si dependen del tamaño del sistema (como por ejemplo el volumen, o la carga eléctrica).

■ **Procesos termodinámicos**

La termodinámica busca establecer relaciones entre las variables de un sistema bajo cambios de estado, concretamente estados de equilibrio. Un proceso es el mecanismo mediante se da un cambio de estado. Si se visualiza el espacio de grados de libertad, un proceso puede ser una trayectoria entre dos puntos de este espacio, los cuales representan dos estados termodinámicos. Decimos que un proceso es *cuasi-estático* cuando es posible representar la transición entre estados mediante una trayectoria; frecuentemente la transición no se da como una sucesión de estados de equilibrio y no es posible representar el proceso mediante una trayectoria en el espacio de variables. En ese caso el proceso es *no cuasi estático* o *irreversible*.

2.2. Ley cero de la termodinámica: temperatura

Supondremos el principio de que un sistema aislado de sus alrededores alcanza el equilibrio termodinámico después de cierto tiempo. Si ponemos

dos sistemas A y B , representados por variables $\{X_A, Y_A\}$ y $\{X_B, Y_B\}$ respectivamente, en contacto entre ellos, el nuevo sistema $A + B$ alcanzará un estado de equilibrio termodinámico. Dependiendo de las condiciones, este estado se dará con o sin variaciones de las variables $\{X_A, Y_A, X_B, Y_B\}$. Decimos que A y B están en equilibrio mutuo si al separarlos sus propiedades no varían con el tiempo. Si consideramos un tercer sistema C , tendremos que se cumple el siguiente enunciado,

Ley cero de la termodinámica: si un objeto A está en equilibrio termodinámico con B y B está en equilibrio con C entonces A y C están en equilibrio termodinámico.

Experimentalmente se tiene que al tener A y B en equilibrio se requieren tres de las cuatro variables $\{X_A, Y_A, X_B, Y_B\}$ para caracterizar un estado de equilibrio del sistema $A + B$. Esta observación implica la existencia de una relación de tipo

$$f(X_A, Y_A, X_B, Y_B) = 0, \quad (2.1)$$

representando el equilibrio entre A y B , la cual puede escribirse como

$$\phi_A(X_A, Y_A) = \phi_B(X_B, Y_B) \equiv \theta. \quad (2.2)$$

El valor numérico de θ define el estado de equilibrio mutuo entre A y B , generalizable al equilibrio con cualquier otro sistema C . Este valor se le designa **temperatura empírica** y la ecuación

$$\phi(X, Y) = \theta, \quad (2.3)$$

se denomina **ecuación de estado**. La ecuación $\phi(X, Y) = \text{constante}$ define una *curva isotérmica* en el espacio de variables.

2.2.1. Escalas de temperatura

La medición práctica de la temperatura se hace mediante un sistema en el se pueden fijar los grado de libertad Y con la excepción de uno, X , el cual funciona como propiedad termométrica, determinando el valor de la temperatura mediante

$$\theta(X) = \theta(X, Y_i),$$

derivada de la ecuación de estado del sistema. Este sistema entra en equilibrio termodinámico con otros sistemas para determinar sus temperaturas.

Existen distintas escalas de temperatura, definidas estableciendo propiedades termométricas de dos estados determinados de sistemas de comportamiento conocido. La escala de grados centígrados tiene su origen ($T = 0$) en

el punto triple del agua y $T = 100^\circ\text{C}$ en el punto de ebullición. La escala fahrenheit fue diseñada originalmente para medir $T = 100^\circ\text{F}$ en la temperatura del cuerpo humano. Finalmente, la escala kelvin es la de mayor significado físico al tomar como referencia el cero absoluto, definido en la tercera ley de la termodinámica.

2.3. Ecuación de estado y gas ideal

La ecuación de estado (2.2) puede escribirse también como

$$\theta = f(X, Y), \quad (2.4)$$

una determinación de la temperatura dados los valores de las variables termodinámicas independientes. Si tenemos n grados de libertad la ecuación de estado toma la forma $\theta = f(X_1, \dots, X_n)$. Aunque en principio f es una función dependiente de la estructura microscópica detallada del sistema, θ es una variable macroscópica determinable midiendo cantidades macroscópicas solamente.

En el caso de los gases, podemos emplear como variables de estado la presión, p , y el volumen V . Empíricamente se ha establecido que, independientemente de su naturaleza y temperatura, a presiones bajas los gases tienden a seguir una relación universal de la forma

$$\lim_{p \rightarrow 0} pv^* = \mathcal{R}\theta,$$

donde $v^* = \frac{V}{N/N_A}$ es el volumen molar del gas, definido como el volumen del gas dividido por el número de moles¹ que lo forman, siendo el número de moles el cociente entre el número de partículas del gas, N , y el número de Avogadro, $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23}$. $\mathcal{R} \simeq 8.3149\text{J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ es la constante de los gases. A partir de esta relación definimos un gas ideal como aquél que cumple la relación

$$pv^* = \mathcal{R}\theta. \quad (2.5)$$

La ecuación de estado del gas ideal puede expresarse de varias formas equivalentes,

$$pV = \nu\mathcal{R}\theta \Leftrightarrow pV = Nk\theta \Leftrightarrow p = nk\theta \quad (2.6)$$

donde ν es el número de moles del gas, N es el número total de partículas, $n = N/V$ es su densidad volumétrica y $k = 1.38065 \times 10^{-16}\text{erg K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann. Se desprende la relación $k = \mathcal{R}/N_A$.

¹por definición una mol de ^{12}C tiene una masa de 12 gramos.

2.4. Primera ley de la termodinámica: calor y energía

2.4.1. Trabajo termodinámico

La energía interna de un sistema termodinámico puede alterarse al realizar sobre él un trabajo mecánico, W . En un sistema mecánico la energía total del mismo es constante bajo fuerzas conservativas, $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} =$ constante, o $\Delta E_{mec} = 0$. Si el sistema está bajo la influencia de fuerzas no conservativas, como son las fuerzas de fricción, la energía mecánica cambia de acuerdo a $\Delta E_{mec} = W$, siendo

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.7)$$

el trabajo realizado por la fuerza no conservativa. En términos diferenciales escribimos dW en vez de dW para denotar que el trabajo realizado no depende de los estados inicial y final, sino de la trayectoria de integración. En la generalización termodinámica el dW indica que el trabajo realizado no depende de los estados inicial y final sino del tipo de proceso (cuasi estático o no cuasi estático).

El trabajo mecánico puede generalizarse a distintos tipos de trabajo termodinámico capaces de alterar la energía total del sistema:

Trabajo mecánico

Si consideramos un sistema que ocupa un volumen V el cual es modificado en dV al ejercer sobre él una presión p podemos ver que

$$dW = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = p dA \hat{n}_i \cdot d\vec{r}_i = p dV,$$

siendo $d\vec{r}_i$ el desplazamiento diferencial de un elemento de área dA en su frontera de normal $n_i \perp d\vec{r}_i$. Bajo la convención de que el trabajo es positivo cuando es realizado sobre el sistema, por ejemplo al comprimirlo ($dV > 0$) se redefine el trabajo mecánico como $dW = -pdV$.

Trabajo eléctrico

Un campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$ realiza trabajo sobre un dipolo eléctrico \vec{p} al modificarlo de acuerdo a

$$dW = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{p}.$$

Trabajo magnético

Un campo magnético $\vec{\mathcal{H}}$ realiza trabajo sobre un dipolo magnético \vec{m} al modificarlo de acuerdo a

$$dW = \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{m}.$$

Trabajo químico

En un sistema con distintos tipos de partículas es posible tener reacciones que involucren la desaparición de una especie a beneficio de otra. El trabajo requerido para incrementar en dn_i el número de moles (o partículas) de la especie i -ésima está dado por

$$\bar{d}W = \mu_i dn_i,$$

donde μ_i es el *potencial químico* de la especie.

Todas las formas de trabajo involucran relaciones de tipo $\bar{d}W = X_i dY_i$, siendo X_i, Y_i variables termodinámicas. Las variables X_i, Y_i que intervienen en una misma expresión, como por ejemplo p y V , son variables *conjugadas*.

2.4.2. Enunciado de la primera ley

En un sistema aislado con paredes adiabáticas tenemos que el trabajo realizado para modificar su estado no depende del proceso y sólo de los estados inicial y final. Identificamos este trabajo con un cambio en una variable de estado llamada *energía interna*, U , de forma que $\Delta U = W_{ad}$. El cumplimiento de esta relación establece la existencia de la energía interna como una variable de estado.

En general los procesos no serán adiabáticos, $\Delta U - W \neq 0$. La conservación de la energía requiere que la diferencia se manifieste en otra forma de energía, que viene siendo el calor definido por $\Delta U - W = Q \equiv W_{ad} - W$. De donde se enuncia la primera ley de la termodinámica como la extensión del principio de conservación de energía a sistemas termodinámicos.

El incremento en la energía de un sistema es igual a la cantidad de energía añadida calentando el sistema más el trabajo mecánico que se realiza sobre el.

Si U es la energía interna U de un sistema la primera ley se expresa como

$$\Delta U = Q + W, \quad (2.8)$$

donde Q es el calor transferido y W es el trabajo realizado sobre el sistema. La versión diferencial de la primera ley se escribe como

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W, \quad (2.9)$$

explicitando que ni W ni Q son variables de estado.

La transferencia de energía en forma de calor se manifiesta en un cambio en la temperatura,

$$dQ = C dT,$$

siendo C la capacidad calorífica del sistema. El calor específico c es la capacidad calorífica por unidad de masa, $Q = mc\Delta T$. El efecto neto de una transferencia de calor es aumentar la temperatura. Se distinguen dos tipos de calores específicos, relacionados a procesos que mantienen el volumen constante (C_V) y procesos que se hacen bajo presión constante (C_p),

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p. \quad (2.10)$$

A partir de estos calores específicos se define el índice adiabático,

$$\gamma = C_p/C_V.$$

El "tache" en la diferencial de calor indica que dQ no es una diferencial exacta, siendo el valor de Q dependiente no solo de los estados iniciales y finales, sino también de la trayectoria entre ellos (o de los estados intermedios). Por tanto el calor no es una variable de estado.

2.4.3. Algunos procesos termodinámicos para un gas ideal

Resnick §19.10

Trabajo realizado por un gas en un proceso...

- isobárico: a presión constante,
- isocórico: a volumen constante,
- isotérmico: a temperatura constante,
- adiabático: sin intercambio de calor,
- isentálpico: a entalpía constante.

2.5. Teoría cinética de gases ideales

La teoría cinética representa el modelado estadístico de un gas ideal como un conjunto de N partículas libres. La energía de cada partícula es su

energía cinética $\epsilon = mv^2/2$ y la energía interna del gas viene siendo la suma de las energías internas individuales,

$$U = \sum_{j=1}^N \epsilon_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j v_j^2 = N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle. \quad (2.11)$$

2.5.1. Presión de un gas ideal

Consideramos las colisiones en las paredes de un recipiente que contiene a un gas ideal para obtener $P = (1/3)N \langle m v^2 \rangle$. Se deduce para un gas ideal $U = (3/2)Nk$ y $E = (3/2)PV$.

2.5.2. Distribución de velocidades y energías

Las partículas interactúan mediante colisiones elásticas, que conservan la energía del gas pero dan lugar a intercambios de energías entre partículas, las cuales pueden tener distintas velocidades. La isotropía implica que las tres coordenadas de velocidad se comportan de la misma manera, cumpliendo

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0.$$

La isotropía también implica

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{kT}{m},$$

Dado que cada componente no tiene mayor restricción que el valor de su promedio y desviación estándar ($v_T = \sqrt{kT/m}$), de acuerdo al teorema del límite central su distribución tiende a una normal, o gaussiana,

$$f(v_i)dv_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{v_T} \right)^2 \right\} \frac{dv_i}{v_T},$$

con $i = \{x, y, z\}$. Juntando las tres componentes se obtiene

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = (2\pi kT/m)^{-3/2} e^{-mv^2/2kT} dv_x dv_y dv_z,$$

y de ahí la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann,

$$f(v)dv = (2\pi kT/m)^{-3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv, \quad (2.12)$$

aprovechando nuevamente la isotropía en $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$.

2.6. Entropía: segunda y tercera leyes de la termodinámica

2.6.1. Entropía y segunda ley

El calor no es una diferencial exacta, pero puede separarse en dos términos que permiten definir una función con diferencial exacta, la entropía S mediante la relación,

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T}, \quad (2.13)$$

donde Q_{rev} indica que el cálculo de ΔS se hace yendo del estado inicial i al final f empleando un proceso reversible (adiabático). A diferencia del calor, el cambio en la entropía depende solamente de los estados inicial y final y no de los detalles del proceso que lleva de uno al otro: S es una variable de estado (extensiva). En general un proceso no es adiabático y se puede mostrar que

$$\int_i^f \frac{dQ}{T} \leq \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T},$$

lo que nos lleva a la segunda ley de la termodinámica, la cual se puede enunciar como

la entropía de un sistema cerrado nunca decrece,

o equivalentemente,

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.14)$$

A partir de la definición en eq. (2.13) es posible calcular el cambio de entropía de un gas ideal monoatómico en diferentes procesos:

- proceso adiabático: $\Delta S = 0$.
- proceso isotérmico reversible: $\Delta S = Q/T$.
- proceso isométrico reversible:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dU}{T} = \int_i^f C_v \frac{dT}{T} \rightarrow \frac{3}{2} \nu R \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right),$$

siendo ν el número de moles.

- isobárico reversible:

$$\Delta S = \int_i^f C_p \frac{dT}{T} \rightarrow \frac{5}{2} \nu R \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right).$$

- expansión libre ($dU = 0$, $dT = 0$): $\Delta S = W/T = \nu R \ln(V_f/V_i)$.

En general para un gas ideal monoatómico tenemos

$$\Delta S = C_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \rightarrow \quad S = \frac{3}{2}\nu R \ln T + \nu R \ln V + S_0.$$

Podemos mostrar que esto equivale a

$$S = \frac{3}{2}\nu R \ln(PV^\gamma) + S_0, \quad \text{con } \gamma = 5/3.$$

2.6.2. Tercera ley y el cero absoluto

Sin mayor explicación enunciamos la tercera ley

La entropía de un sistema es nula en el cero absoluto, definido como el estado de mínima energía interna.

De manera equivalente la tercera ley define el límite de la entropía en el cero absoluto,

$$S \rightarrow 0, \quad \text{para } T \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Esta ley es incompatible con la ecuación de estado de un gas ideal, la cual falla cerca del cero absoluto, que corresponde a $T = 0$ en la escala Kelvin. Por otro lado la entropía y energía interna de un sistema tienen su valor mínimo en este punto. En la práctica la mecánica cuántica evita que esta energía mínima sea cero.

Capítulo 3

Electricidad y magnetismo

Resnick §22 a 34.

3.1. Carga eléctrica

La carga eléctrica es la propiedad que indica de manera cuantitativa la tendencia de la materia a interactuar a través de fuerzas electrostáticas.

La carga tiene signo. Cargas de mismo signo se repelen; cargas de signo opuesto se repelen.

La fuerza entre dos cargas, q_1 y q_2 está dada por la ley de Coulomb

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (3.1)$$

siendo \hat{r} el vector unitario que une a las cargas. Esta fuerza tiene la misma forma funcional que la ley de la gravitación, ecuación 1.41.

Sistemas de unidades.

La carga está cuantizada, siendo la carga mínima la del electrón¹.

La carga se conserva. Procesos como la creación de materia,

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-,$$

solo se dan siguiendo este principio.

¹sin considerar a los quarks, que tienen cargas en múltiplos de $e/3$, pero no pueden aparecer aislados

3.2. Campos eléctricos

El campo eléctrico se define como la fuerza por unidad de carga en un punto,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q. \quad (3.2)$$

Es un campo vectorial, en el sentido de que se representa por un vector definido para cada punto del espacio.

Líneas de campo eléctrico: representan al campo el cual es un vector tangente a la línea en un punto dado del espacio (Resnick figs. 23-2 y siguientes). Divergen en cargas positivas y convergen en cargas negativas.

Campos eléctricos importantes:

- el de una carga puntual
- el de un dipolo eléctrico (puntual). Un dipolo puntual se define a tender a cero la separación d entre las cargas y aumentar las cargas a infinito, conservando $\vec{p} = e\vec{d}$ constante.
- una línea de carga: simetría cilíndrica.
- un disco cargado.

Efecto de un campo eléctrico en

- una carga,
- un dipolo.

Energía potencial de un dipolo eléctrico, definida a partir de energía de la fuerza.

3.3. Ley de Gauss

Flujo de un campo eléctrico,

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q/\epsilon_0.$$

Usando una simetría esférica alrededor de una carga puntual recuperamos la ley de Coulomb,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Casos con simetría esférica, cilíndrica, plana.
(Ley de Gauss para dieléctricos).

3.4. Potencial eléctrico

Definido a partir de la energía potencial $V = U/q$.
Superficies equipotenciales: perpendiculares a líneas de campo.

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Potencial de una carga puntual. Principio de superposición,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Potenciales de un dipolo y distribución continua de carga.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Energía potencial asociada a una distribución de carga.

3.5. Circuitos

Conductores, resistencias, capacitancias, ley de Ohm.

3.6. Campos magnéticos

Fuerza magnética

$$F_b = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Líneas de campo magnético.

Fuerza magnética en un alambre portador de corriente.

Dipolo magnético: momento, torca, energía, campo.

Campo debido a una corriente. ley de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.3)$$

Casos del alambre infinito y del arco circular.

Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \quad (3.4)$$

3.7. Inducción de campos eléctricos y magnéticos

Ley de Faraday: fuerza electromotriz inducida por el cambio de flujo magnético en una superficie abierta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Segunda versión

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Densidad de energía del campo magnético $u_b = B^2/\mu_0$.

3.8. Ecuaciones de Maxwell

Ley de Gauss para campos magnéticos

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0, \quad (3.5)$$

indica la falta de monopolos magnéticos.

Momento de un dipolo de espín, $\mu_s = -e\vec{S}/m$, en múltiplos de $\hbar/2\pi$.

Campos magnéticos inducidos.

Ley de Ampere-Maxwell, corriente de desplazamiento.

Ecuaciones de Maxwell: integrales, diferenciales.

3.9. Campos electromagnéticos

Resnick §34.

Solución de Maxwell en el vacío. Velocidad de propagación. Transporte de energía, vector de Poynting. Presión de radiación. Espectro electromagnético.

Capítulo 4

Mecánica Cuántica

Resnick §39 a 44.

4.1. Radiación y el fotón

A finales del siglo XIX se conocían algunos problemas, relacionados con la interacción entre materia y radiación, que finalmente evidenciaron la naturaleza cuántica de ambas.

4.1.1. Leyes de Kirchhoff

Describen cualitativamente la interacción entre materia y radiación:

1. Un gas tenue frío produce líneas de absorción;
2. Un gas tenue caliente produce líneas de emisión;
3. Un gas denso caliente produce un espectro continuo.

En los casos (1) y (2) las líneas son características para cada elemento químico (o molécula) dado. Por ejemplo, el sodio: las lámparas de sodio de baja presión emiten luz amarilla muy característica que corresponde a una longitud de onda de unos 5900Å . Estas mismas líneas se observan en absorción en el espectro del Sol y otras estrellas. Las lámparas de sodio de alta presión emiten luz no monocromática, en parte porque la mayor presión da lugar a un mayor movimiento térmico (una distribución de velocidades en equilibrio - Maxwell-Boltzmann) y con ello se ensanchan las líneas; por otro lado a mayor presión y densidad aparecen más líneas que ayudan a ir "llenando el continuo".

4.1.2. Espectro de cuerpo negro e hipótesis de Planck

Un cuerpo negro es un objeto que absorbe toda la radiación que incide sobre él. Se trata de concepto idealizado, como la masa puntual o el gas ideal: en la práctica los átomos y moléculas absorben radiación de manera selectiva. Sin embargo, en ciertas condiciones la materia puede comportarse como un cuerpo negro. Un cuerpo negro es también un emisor de radiación y su espectro corresponde a un equilibrio termodinámico entre la radiación y la materia. El espectro de emisión, caracterizado por la intensidad de la radiación I_ν (en $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$), está plenamente definido por la temperatura T de equilibrio según la función de Planck, $B_\nu(T)$,

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (4.1)$$

La explicación de esta forma funcional requirió el enunciado de Planck.

Históricamente Planck llegó a la expresión 4.1 de manera empírica, reconciliando la fórmula de Rayleigh-Jeans, $I_\nu = 2\nu^2 kT/c^2$, válida para bajas frecuencias, con la de Wien, $I_\nu \propto \nu^3 e^{-b\nu}$, válida a altas frecuencias. Por otro lado se conocía la expresión estadística para la la densidad de energía de radiación en equilibrio termodinámico a una temperatura T ,

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu = \frac{dN_\nu}{dV} \bar{\epsilon}$$

en $\text{erg cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}$, siendo $dN_\nu/dV = 8\pi\nu^2/c^3$ la densidad de osciladores de frecuencia ν por unidad de frecuencia y volumen.

El espectro de cuerpo negro requiere el enunciado de Planck, $E = n h\nu$, con n un número entero.

4.1.3. Efecto fotoeléctrico

En el efecto fotoeléctrico luz incidente sobre un metal puede ser absorbida dando lugar a la emisión de electrones. En el laboratorio la implementación se hace midiendo una corriente eléctrica o el voltaje requerido para suprimir esta corriente. Se halla que la condición para que se produzca la corriente es $h\nu \geq \phi$, independientemente de la intensidad de la luz. El valor de ϕ depende del metal en cuestión. Por otro lado, cuando se cumple esta condición se puede aplicar un voltaje para medir la energía cinética que pueden alcanzar los electrones liberados, siendo esta

$$E_c = h\nu - \phi. \quad (4.2)$$

Basándose en el enunciado de Planck, Einstein interpretó estos resultados describiendo a la luz incidente como un conjunto de partículas (fotones) de energía

$$E = h\nu, \quad (4.3)$$

La relación 4.3, junto con $\lambda\nu = c$, permite definir las regiones del espectro electromagnético, radio, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma.

4.1.4. Efecto Compton y momento de un fotón

El efecto Compton consiste en la dispersión de radiación de alta energía por un electrón en reposo, la cual modifica la frecuencia de la radiación. Compton describió exitosamente el proceso como la colisión elástica de un fotón y un electrón. Para esta descripción se emplea la conservación de momento y energía con el momento lineal del fotón dado por

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

4.2. El átomo de Bohr

En la mecánica clásica el átomo es un sistema inestable que radía su energía casi instantáneamente. Bohr construyó el primer modelo que emplea cuantización para convertir al átomo en un sistema estable.

Bohr parte de la solución al potencial central con un potencial Coulombiano

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{r},$$

donde para el átomo de hidrógeno $q_1 = +e, q_2 = -e$. En el caso de órbitas circulares ($\dot{r} = 0$), y usando la conservación de energía y momento angular

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r},$$

la órbita de menor energía corresponde a un radio a tal que,

$$a = \frac{L^2}{me^2}, \quad E = -\frac{e^2}{2a}. \quad (4.4)$$

Desde el siglo XIX era sabido que esta solución clásica presentaba un grave problema. Las leyes de la electrodinámica, sintetizadas en las ecuaciones de Maxwell, predicen que una carga acelerada pierde energía en forma de

radiación electromagnética. Esto haría al átomo inestable, ya que al radiar energía el electrón caería en un tiempo extremadamente corto.

Bohr intuyó que la solución a este problema sería restringir los estados del átomo a un número discreto de posibilidades, con una condición similar al postulado de Planck, que sería congruente con la fórmula empírica para la ubicación de las líneas del espectro del hidrógeno,

$$\lambda_{nm}^{-1} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (4.5)$$

Bohr impuso la condición

$$L = n\hbar, \quad (4.6)$$

con n un número entero, de donde 4.4 da la siguiente solución al átomo de hidrógeno,

$$a_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2, \quad E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad (4.7)$$

donde $a_n = a_1 n^2$, siendo a_1 el llamado radio de Bohr. En este modelo el átomo solo puede tener valores de energía dados por 4.7. Un cambio de energía corresponde a un cambio del número cuántico n a otro valor, digamos m , emitiendo o absorbiendo un fotón de energía

$$E_n - E_m = hc/\lambda_{nm},$$

reproduciendo exitosamente el espectro del átomo de hidrógeno dado por la fórmula 4.5.

A pesar de reproducir las dimensiones y niveles de energía del hidrógeno, el átomo de Bohr es un modelo artificial, siendo la condición 4.6 físicamente incorrecta. La descripción correcta al átomo de hidrógeno se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger, que contiene el principio de conservación de energía, para un potencial Coulombiano. La solución a esta ecuación impone restricciones a la energía y momento angular del átomo, discretizando sus valores. El estado de un átomo de hidrógeno se representa mediante tres números cuánticos (n, ℓ, m) enteros, que se relacionan con la energía y momento angular,

$$E = -|E_1|/n^2 \quad L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \quad L_z = m\hbar,$$

con las restricciones $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq \ell \leq n$, $-\ell \leq m \leq \ell$. Así, un valor de n , el número cuántico principal, corresponde a un valor de la energía, para el cual puede haber varios valores de momento angular.

4.3. Formalismo de la mecánica cuántica

4.3.1. El formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica

El formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica describe el estado de un sistema a través de coordenadas generalizadas, q_i , y los momentos respectivos, p_i , definidos como

$$p_i \equiv \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.8)$$

siendo E_c la energía cinética. Así, tomando como ejemplo el movimiento de una partícula descrito en coordenadas esféricas,

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \dot{\theta}^2, \quad (4.9)$$

tenemos

$$p_r = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad p_\theta = mr^2 \dot{\theta}. \quad (4.10)$$

Mientras que a la coordenada lineal r le corresponde la componente radial del momento lineal, a las coordenadas angulares les corresponden componentes del momento angular.

A partir de estas definiciones se construye el Hamiltoniano, función de coordenadas y momentos (y en principio del tiempo) dada por

$$H(q_i, p_i, t) \equiv E_c(q_i, p_i) + U(q_i, t). \quad (4.11)$$

El movimiento está dado por la ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.12)$$

Siguiendo esta receta, el movimiento de una partícula en coordenadas esféricas se rige por el Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r, \varphi, \theta),$$

y las ecuaciones de Hamilton quedan como

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta},$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Estas ecuaciones son equivalentes a las que se obtienen de las leyes de Newton. En el caso de un potencial central, obtenemos la conservación del momento angular, $\vec{L} = -\dot{\theta} p_\varphi / \sin \theta + \dot{\varphi} p_\theta$.

4.3.2. Fundamentos y ecuación de Schrödinger

La mecánica cuántica se basa en una serie de postulados, comenzando por una descripción distinta del estado de un sistema. En lugar de emplear posiciones y velocidades para caracterizar un sistema,

1 - toda la información dinámica de un sistema está contenida en la *función de onda*, $\psi(\vec{x}, t)$.

En particular, cuando se normaliza la norma de la función de onda, $|\psi|^2 = \psi^*\psi$, ésta indica la probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo dado,

$$P(a \leq x \leq b)(t) = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (4.13)$$

El estado de un sistema cambia al modificar la función de onda. La descripción adecuada de estos cambios cumple el segundo postulado:

2 - las variables físicas, como la posición, los momentos lineal y angular, la energía, etc. . . , se representan mediante *operadores*¹ que actúan sobre la función de onda.

En particular tenemos

$$\mathbf{x}\psi(x) = x\psi(x), \quad \mathbf{p}_x\psi = -i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow \vec{\mathbf{p}}\psi = -i\hbar\nabla\psi. \quad (4.14)$$

La acción del operador de posición es trivial y en general no se requiere indicar su carácter de operador. El proceso de la medición física se establece en el tercer postulado

3 - La medición del valor de una variable se hace de manera estadística, promediando sobre la norma de la función de onda,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \psi^* \hat{\mathcal{O}} \psi dx,$$

suponiendo $|\psi|^2$ normalizada. Toda medición conlleva una incertidumbre inherente a la naturaleza cuántica de la materia que se define estadísticamente,

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

En particular la mecánica cuántica restringe el conocimiento de cada coordenada y el momento correspondiente a $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, el llamado principio de incertidumbre de Heisenberg.

¹denotados con **negritas** en lo que sigue

La mecánica cuántica sigue el formalismo Hamiltoniano en el cual la descripción mecánica se hace en términos de posiciones y momentos. El *postulado dinámico* establece que

- la función de onda es la solución de la *ecuación de Schrödinger*,

$$\mathbf{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4.15)$$

donde el operador Hamiltoniano \mathbf{H} está dado por

$$\mathbf{H} = \frac{|\vec{\mathbf{p}}|^2}{2m} + U. \quad (4.16)$$

Si sustituimos la expresión (4.14) para los operadores de coordenadas y momentos podemos escribir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}, t)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Dado un potencial U y condiciones iniciales, la solución de (4.17) da la forma de la función de onda ψ , la cual *es* la descripción cuántica del sistema.

4.3.3. Aplicaciones básicas

Hay una infinidad de aplicaciones de interés en mecánica cuántica. Mostremos algunas básicas con aplicaciones de interés.

Partícula libre

Corresponde a un potencial nulo, $U = 0$. En una dimension la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Proponiendo una solución de variables separables, $\psi(x, t) = \phi(x)T(t)$, las funciones se separan de acuerdo a

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -k^2 \phi, \quad \frac{dT}{dt} = -i\omega T, \quad (4.18)$$

con la relación entre constantes $k^2 = 2m\omega/\hbar$. La soluciones son funciones armónicas

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}, \quad (4.19)$$

que representan la superposición de ondas viajando hacia la derecha, $(kx - \omega t)$, e izquierda, $(kx + \omega t)$. La velocidad de propagación de la onda está dada por la velocidad de grupo, $v = d\omega/dk = \hbar k/m$.

El problema principal de la solución 4.19 es no ser normalizable, ya que

$$|\psi|^2 = |A|^2 + |B|^2 + A^* B e^{-2ikx} + AB^* e^{+2ikx}$$

no da un valor finito al integrarse de $x = -\infty$ a $x = +\infty$. Aún así, podemos calcular algunas variables físicas y su incertidumbre integrando entre $x = \pm a$ y tomar el límite $a \rightarrow \infty$. Si consideramos el caso $B = 0$, obtenemos

$$\langle x \rangle = 0, \quad \Delta x = a/\sqrt{3} \rightarrow \infty, \quad \langle p \rangle = \hbar k, \quad \Delta p = 0, \quad \langle H \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

El valor medio del Hamiltoniano es una medida de la energía del sistema; los valores medios cumplen la relación clásica $E \equiv \langle H \rangle = \langle p \rangle^2 / 2m$. Notamos que la posición está completamente indeterminada ($\Delta x \rightarrow \infty$) mientras que el momento está determinado sin incertidumbre ($\Delta p = 0$).

La normalización de la función ψ se logra *indeterminando* el momento mediante una función de peso $A(k)$,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

donde se debe cumplir $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ y la normalización de ψ se garantiza si $A(k)$ está normalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 dk.$$

Estados estacionarios

La separación de variables realizada en el problema anterior es inherente a la ecuación de Schrödinger, constituyendo las funciones ϕ los llamados *estados estacionarios*. La separación de variables se hace planteando

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}. \quad (4.20)$$

Si U no depende explícitamente de t podemos eliminar la dependencia temporal de la ecuación de Schrödinger, la cual queda como

$$\mathbf{H}\phi = E\phi \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) = E \phi(\vec{r}), \quad (4.21)$$

identificando a $\langle H \rangle$ con la energía del sistema. Si el sistema está en un estado estacionario la energía se conserva. La versión estacionaria de la ecuación de Schrödinger se escribe como una ecuación diferencial de valores propios,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + U(\vec{r})\phi = E\phi. \quad (4.22)$$

Esta es la expresión más común para la ecuación de Schrödinger.

Pozo de potencial

El pozo de potencial sirve como un primer ejemplo de la cuantización de la energía. El potencial está definido de la forma

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{para } a < x, \end{cases}$$

tenemos que $\phi = 0$ fuera del pozo de ancho a . Dentro del pozo tenemos

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

con $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Imponiendo $\phi(0) = \phi(a) = 0$ obtenemos

$$\phi(x) = 2i A_n \text{sen}(k_n x), \quad \text{con } k_n = n\frac{\pi}{a},$$

siendo n entero. Esto a su vez impone una condición de cuantización de energía,

$$E_n = \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) n^2.$$

El problema tiene un número infinito numerable de soluciones las cuales quedan especificadas por el valor de n , denominado el *número cuántico*.

Pared de potencial

La pared de potencial ilustra el fenómeno puramente cuántico de *efecto túnel*, la posibilidad de pasar por un potencial a pesar de tener una energía menor a la del mismo. La pared de potencial es de la forma

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -a/2 & (I) \\ V & \text{para } -a/2 \leq x \leq +a/2 & (II) \\ 0 & \text{para } x > +a/2 & (III) \end{cases},$$

tenemos una solución parecida a la anterior, con distintos valores de k dependiendo de si la partícula está en la región (I), (II) o (III). En la zona (I) y (III) la función de onda es armónica con $k = \sqrt{2mE}/\hbar$; en la zona (II) la forma de la función de onda depende del signo de $E - V$:

- si $E - V > 0$:
la función de onda en (II) es armónica con $\kappa = \sqrt{2m(E - V)}/\hbar$. Los coeficientes $\{A, B\}$ deben asegurar la continuidad de ϕ en $x = \pm a/2$.
- si $E - V < 0$:
la función de onda en (II) es una combinación de exponenciales,

$$\phi_{(II)}(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x},$$

con $\alpha = \sqrt{2m(V - E)}/\hbar$. A pesar de tener una energía menor que la de la pared, la partícula puede estar en la región (II) y atravesarla.

La fusión nuclear en el centro de las estrellas ocurre a temperaturas más bajas de las necesarias para superar la repulsión Coulombiana gracias al efecto túnel.

Oscilador armónico - en una dimensión

La importancia del oscilador armónico radica en que cualquier potencial continuo es aproximadamente cuadrático alrededor de un mínimo. La expansión

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \dots$$

se vuelve cuadrática si $dU/dx = 0$. Haciendo un cambio de variable y restando el término constante U_0 , el potencial adquiere la forma $U = kx^2/2$, y la ecuación de Schrödinger se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \phi = E\phi.$$

Se puede ver que una solución de esta ecuación es la función gaussiana; mas en general, se puede demostrar que existe un conjunto numerable de soluciones de la forma $\phi_n(x) = P_n(x)e^{-\alpha x^2}$, donde P_n es un polinomio de orden n . A cada función ϕ_n le corresponde un valor único de energía igual a

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (4.23)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$. Los niveles de energía están equiespaciados, con el mínimo en $E_0 = \hbar\omega/2$. Esta energía distinta de cero para un oscilador armónico tiene repercusiones en distintas áreas de la física, incluidas posibles interpretaciones a la constante cosmológica.

Oscilador armónico - en tres dimensiones

El oscilador en tres dimensiones ilustra tanto la degeneración de estados como un ejemplo de potencial central; nos remitiremos solamente al primer aspecto. La ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + \frac{1}{2}kr^2\phi = E\phi,$$

tiene como solución

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z), \quad E_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega, \quad (4.24)$$

donde $\{n_x, n_y, n_z\}$ son los tres números cuánticos, restringidos a enteros positivos. Procedemos a ver los sistemas de menor energía:

- El estado de mínima energía, o *estado base*, corresponde a $\{0, 0, 0\}$ y $E = 3\hbar\omega/2$. La energía es la suma de las de los tres grados de libertad.
- Después tenemos tres estados, $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$ y $\{0, 0, 1\}$, de misma energía, $E = 5\hbar\omega/2$. Decimos que existe una degeneración de estados cuando varios estados distintos tienen la misma energía. Notamos que los tres estados con $E = 5\hbar\omega/2$ son en realidad un mismo estado sujeto a intercambios de ejes (rotaciones).
- Subiendo en energía, $E = 7\hbar\omega/2$, la degeneración aumenta a seis estados: $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 1\}$, $\{0, 1, 1\}$, $\{2, 0, 0\}$, $\{0, 2, 0\}$ y $\{0, 0, 2\}$. Estos se pueden referir a rotaciones de dos estados, por ejemplo el $\{1, 1, 0\}$ y el $\{0, 0, 2\}$, los cuales son distintos.

El oscilador armónico en tres dimensiones es un caso particular de un potencial central.

Potencial central y átomo de hidrógeno

La ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + U(r)\phi = E\phi,$$

se escribe en coordenadas esféricas y se emplean variables separables para obtener

$$\phi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi),$$

donde Y_{ℓ}^m son los armónicos esféricos, los cuales satisfacen las ecuaciones

$$L^2 Y_{\ell}^m = \ell(\ell + 1)\hbar^2 Y_{\ell}^m, \quad L_z Y_{\ell}^m = m\hbar Y_{\ell}^m.$$

El sistema está descrito por tres números cuánticos, dos de ellos (ℓ, m) relacionados con el momento angular. En general la energía es de la forma $E_{n\ell}$, con degeneración de estados en m .

El átomo de hidrógeno es la solución particular para $U = -e^2/r$.