

Procesos radiativos

Capítulo 4: Teoría clásica de procesos radiativos

Alberto Carramiñana
INAOE

Tonantzintla, 23 de noviembre de 2023

Teoría clásica de procesos radiativos

4.1. Elementos de relatividad especial

4.2. Campos de una carga en movimiento

4.3. Sistemas de cargas

4.4. Bremsstrahlung

4.5. Radiación sincrotrón

4.6. El efecto Compton

4.7. Procesos fotón - electrón a altas energías

4.1. Elementos de relatividad especial

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia.

4.1.2. Postulados.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz.

4.1.4. Consecuencias.

4.1.5. Cuadrivectores.

4.1.6. Fotones y luz.

4.1.7. Campos electromagnéticos.

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia

- ▶ En un sistema de referencia inercial es válida la ley de la inercia (1ª ley de Newton):

En ausencia de fuerzas externas un objeto mantiene un estado de movimiento rectilíneo uniforme.

- Sea O un observador en un sistema de referencia inercial describiendo el movimiento de una partícula con coordenadas, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$.
- Sea O' un observador que se mueve con velocidad constante \vec{v} relativa a O y que mide¹ $\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x} + y'(t)\hat{y} + z'(t)\hat{z}$.
- ▶ En **mecánica clásica** se emplea la transformación de Galileo,

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t, \quad (1)$$

que relaciona mediciones de O y O' cumpliendo con el principio de inercia.

- ▶ La transformación inversa tiene misma forma. Se obtiene de despejar (1), o al invertir el signo de la velocidad,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{v}t. \quad (2)$$

¹Suponemos dos sistemas cartesianos con ejes paralelos.

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia

- ▶ En mecánica Newtoniana las velocidades son aditivas: si $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de una partícula vista por O, la relación entre la velocidad de la partícula medida por ambos observadores, $\vec{u}(t)$ y $\vec{u}'(t)$, es,

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d(\vec{r} - \vec{v}t)}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt'} - \vec{v} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}. \quad (3)$$

- ▶ La transformación de Galileo (1) considera de forma implícita la *invariancia del tiempo*, $dt' = dt$, junto con la de separaciones,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1.$$

- ▶ Las transformaciones entre sistemas de coordenadas son: traslaciones del origen de coordenadas, rotaciones de los ejes de coordenadas y desplazamientos a velocidad constante.

4.1.2. Postulados de la relatividad

La teoría especial de la relatividad se fundamenta en dos postulados:

1. Las leyes de la física tienen la misma forma en todo marco de referencia inercial.
 2. La velocidad de la luz es constante y su valor es independiente del marco de referencia elegido.
- ▶ El postulado 1 indica que *las leyes de la física* mantienen una misma forma en todo marco de referencia inercial. Alrededor de 1900 se creía que las ecuaciones de Maxwell, y la propagación de la luz con velocidad c , eran válidas sólo en reposo con respecto al *éter*, definiendo un marco de referencia privilegiado.
 - ▶ El postulado 2 establece la velocidad de la luz como una cantidad invariante, en conflicto con las invariancias independientes de tiempo y distancia. Ha sido comprobado experimentalmente, al punto de que el metro se define a partir del segundo y del valor de la velocidad de la luz, definido de forma *exacta*:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \quad (4)$$

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- ▶ La constancia de la velocidad de la luz en todo sistema de referencia inercial,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0. \quad (5)$$

- ▶ Las transformaciones cumplen de forma general: $-c^2 dt^2 + dr^2 = -c^2 dt'^2 + dr'^2$.
- ▶ Para ejes con misma orientación y movimiento relativo sobre \hat{x} , se propone una transformación lineal,

$$ct' = A ct + B x, \quad x' = D ct + E x.$$

- ▶ Al combinar con (5) se llega a la expresión básica de la transformación de Lorentz,

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x = \gamma(ct - vx/c), \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x = \gamma(x - vt), \end{cases} \quad (6)$$

con $v = \beta c$. El *factor de Lorentz* queda definido por la condición,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7)$$

- ▶ El factor γ es creciente con $|\beta|$, $\gamma \rightarrow 1$ para $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \infty$ para $\beta \rightarrow \pm 1$.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- ▶ La relatividad emplea **eventos** definidos por coordenadas de **tiempo y posición**.
- ▶ Las transformaciones de Lorentz entre eventos preservan la forma del *intervalo*² $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2$ en todo sistema inercial \Rightarrow *principio de invariancia*.
- ▶ Las transformaciones de Lorentz forman un grupo que se puede representar con matrices de 4×4 que incluye:
 - traslaciones y rotaciones fijas, translaciones a velocidad constante (*boost*),
 - inversiones espaciales y temporales, sin significado físico.
- ▶ La transformación para un movimiento rectilíneo uniforme sobre el eje \hat{x} es,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

²abreviando $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

Transformaciones para movimientos rectilíneos uniforme a lo largo de los ejes \hat{y} y \hat{z} ,

$$\Lambda(y) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(z) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

La transformación correspondiente a una velocidad $\vec{v} = \vec{\beta}c$ entre dos sistemas con *ejes paralelos* viene dada por,

$$\begin{cases} ct' &= \gamma ct - \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{r} \\ \vec{r}' &= -\gamma \vec{\beta} ct + \vec{r} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{r})\hat{\beta}, \end{cases} \quad (9)$$

que satisface, por construcción, $-c^2 dt^2 + dr^2 = -c^2 dt'^2 + dr'^2$.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- ▶ **Inversa:** toda transformación tiene una inversa única. Empleando notación matricial y omitiendo (y, z) , la transformación inversa de (8) es,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

La inversa para ejes paralelos se obtiene reemplazando $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$.

- ▶ **Suma:** Al combinar dos transformaciones paralelas, con $v_1 = \beta_1 c$, $v_2 = \beta_2 c$, se obtiene una transformación con

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2},$$

que satisface $|\beta| < 1$ para $|\beta_1|, |\beta_2| < 1$.

- ▶ Transformaciones más complejas combinan rotaciones y movimientos rectilíneos, notando con precaución que el grupo de Lorentz no es conmutativo.

4.1.4. Consecuencias

► Simultaneidad:

para O los eventos $(t_1 = 0, x_1 = 0)$ & $(t_2 = 0, x_2 = X)$ son simultáneos ($t_1 = t_2$). En O' estos eventos no son simultáneos. El primer evento se transforma de forma trivial en $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$, mientras que,

$$\begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_2 = 0 \\ x_2 = X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\beta X \\ \gamma X \end{pmatrix}$$

es decir $t'_2 = -\gamma\beta X/c \neq t'_1 = 0$. La simultaneidad depende del observador.

► Dilatación temporal:

dos eventos distintos en un mismo punto, $(t_1 = 0, x_1 = 0)$ & $(t_2 = T, x_2 = 0)$, para O . En O' los mismos eventos: $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$ & $(t'_2 = \gamma T, x'_2 = -\gamma\beta cT)$. La dilatación temporal radica en $t'_2 - t'_1 \geq T$. El lapso de tiempo entre dos eventos es mínimo en el marco de referencia en el cual los eventos suceden en el mismo punto. Se define el *tiempo propio* como aquel transcurrido en el marco de referencia donde la separación entre eventos es puramente temporal.

4.1.4. Consecuencias

▶ Contracción espacial:

La medición de una barra de longitud L que realiza O puede describirse con los eventos $(t_1 = 0, x_1 = 0)$, $(t_2 = 0, x_2 = L)$.

- ▶ O' registra estos eventos en $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$, $(t'_2 = -\gamma\beta L/c, x'_2 = \gamma L)$. Si $L' = x'_2 - x'_1 \geq L$, parecería una expansión, no una contracción...
- ▶ La medición de ambos extremos de la barra debe ser *simultánea* en O' . Una medición simultánea en O no es simultánea en O' , con respecto a quién la barra se mueve. La solución consiste en dejar t_2 libre, y exigir $t'_1 = t'_2$; $t_2 \neq t_1$ no representa problema ya que la barra está en reposo en O .
- ▶ Consideramos la medición en O $(t_1 = 0, x_1 = 0)$, $(t_2, x_2 = L)$ que corresponde a medición simultánea en O' $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$, $(t'_2 = 0, x'_2 = L')$ y la transformación,

$$\begin{pmatrix} ct'_2 = 0 \\ x'_2 = L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 = L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct_2 - \gamma\beta L \\ -\gamma\beta ct_2 + \gamma L \end{pmatrix}$$

La simultaneidad en $O' \Rightarrow t_2 = \beta L/c \Rightarrow L' = L/\gamma \leq L$, una contracción.

4.1.5. Cuadrivectores - eventos

- ▶ La relatividad generaliza la mecánica de Newton introduciendo *cuadrivectores*, generalización de vectores espaciales que incorporan la componente temporal.
- ▶ La invariancia de la velocidad de la luz se introduce en la construcción de los cuadrivectores.
- ▶ El cuadrivector básico ubica un evento en el espacio y tiempo,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

abreviadas x^α , con $\alpha = 0$ para la componente temporal, $\alpha \rightarrow j = \{1, 2, 3\}$ para las componentes espaciales.

- ▶ De forma explícita, el cuadrivector de tiempo y posición está dado por,

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

4.1.5. Cuadrivectores - intervalos; tensor de Minkowski

- ▶ Se define el intervalo entre dos eventos,


$$\Delta s^2 \equiv -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \quad (11)$$

- ▶ *La propagación de la luz* cumple $\Delta s = 0$ en todo marco de referencia.
- ▶ Eventos causalmente conectados cumplen $\Delta s^2 \leq 0$.
- ▶ La relación (11) se puede escribir de forma diferencial y compacta como,

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \implies ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (12)$$

definiendo el **tensor de Minkowski**³,

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

³En coordenadas cartesianas. A veces se usa $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$; por ejemplo en el Jackson. 

4.1.5. Cuadrivectores - sumatorias implícitas

- ▶ La **convención de sumatoria sobre índices repetidos** (12), permite convertir cuadrivectores *contravariantes* en *covariantes*, empleando el tensor de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} A^\alpha \equiv \eta_{0\beta} A^0 + \eta_{1\beta} A^1 + \eta_{2\beta} A^2 + \eta_{3\beta} A^3 = A_\beta, \quad (14)$$

es decir

$$A_\beta = \eta_{\alpha\beta} A^\alpha = \left(-A^0, \vec{A} \right) \Rightarrow A_0 = -A^0, A_j = A^j \quad \text{con } j = \{1, 2, 3\}.$$

- ▶ Cuadrivectores **contravariantes**, A^α con super-índice, se transforman de acuerdo a,

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta. \quad (15)$$

- ▶ Cuadrivectores **covariantes**, con sub-índice, se transforman de acuerdo a,

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} A_\beta. \quad (16)$$

4.1.5. Cuadrivectores - transformación de cuadrivectores

- Las transformaciones directa e inversa de un cuadrivector (contravariante) A^α entre dos sistemas con ejes paralelos están dadas por

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma A^0 - \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{A} \\ \vec{A}' = -\gamma \vec{\beta} A^0 + \vec{A} + (\gamma - 1) (\hat{\beta} \cdot \vec{A}) \hat{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^0 = \gamma A'^0 + \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{A}' \\ \vec{A} = \gamma \vec{\beta} A'^0 + \vec{A}' + (\gamma - 1) (\hat{\beta} \cdot \vec{A}') \hat{\beta}. \end{cases} \quad (17)$$

- Separando el vector \vec{A} en componentes perpendicular y paralela a $\vec{\beta}$,

$$\vec{A} = A_{\parallel} \hat{\beta} + \vec{A}_{\perp},$$

con $\vec{A}_{\perp} \cdot \hat{\beta} = 0$, se tiene que (17) puede escribirse como,

$$\vec{A}' = -\gamma \vec{\beta} A^0 + \gamma A_{\parallel} \hat{\beta} + \vec{A}_{\perp},$$

es decir

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma A^0 - \gamma \beta A_{\parallel} \\ A'_{\parallel} = -\gamma \beta A^0 + \gamma A_{\parallel} \\ \vec{A}'_{\perp} = \vec{A}_{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^0 = \gamma A'^0 + \gamma \beta A'_{\parallel} \\ A_{\parallel} = \gamma \beta A'^0 + \gamma A'_{\parallel} \\ \vec{A}_{\perp} = \vec{A}'_{\perp} \end{cases}, \quad (18)$$

4.1.5. Cuadrivectores - producto escalar, norma - invariantes

- ▶ Se generaliza el producto escalar entre cuadrivectores,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\alpha B^\alpha = \eta_{\alpha\sigma} A^\sigma B^\alpha = -A^0 B^0 + \vec{A} \cdot \vec{B} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}',$$

con $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$, invariante para cuadrivectores, que se transforman de acuerdo a (15,16), por definición.

- ▶ Se tiene definida la "norma" de cada cuadrivector,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_\alpha A^\alpha = -(A^0)^2 + \vec{A} \cdot \vec{A},$$

invariante ante transformaciones.

- ▶ La construcción de cuadrivectores representando entidades físicas se hace empleado el intervalo s , con la definición del *tiempo propio*.

4.1.5. Cuadrivectores - tiempo propio

- ▶ Se define el **tiempo propio**, τ , a partir del intervalo s ,

$$d\tau \equiv \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \frac{dt}{\gamma}. \quad (19)$$

El tiempo propio es un *escalar* invariante, independiente del marco de referencia.

- ▶ Se construyen cuadrivectores al derivar sobre $d\tau$. Así el cuadrivector de velocidad,

$$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

de norma $u_\alpha u^\alpha = -c^2$, invariante.

- ▶ La derivada del cuadrivector de velocidad es el cuadrivector de aceleración,

$$a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c d\gamma/dt \\ \gamma d(\gamma \vec{v})/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{v} / c \\ \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v} / c^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

La norma $a_\alpha a^\alpha$ corresponde al cuadrado de la aceleración en el marco de referencia instantáneo de la partícula acelerada. Es invariante.

4.1.5. Cuadrivectores - energía y momento

- ▶ El cuadrivector de energía-momento se define para una partícula de masa m como,

$$p^\alpha \equiv mu^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

generalizando el momento de una partícula $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, y su energía.

- ▶ La energía de la partícula, $E = \gamma mc^2$, tiene la parte en reposo, $E_0 = mc^2$, y la cinética, $E_c = (\gamma - 1)mc^2$,

$$E = E_0 + E_c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \dots \quad (23)$$

- ▶ La norma del cuadrivector de energía-momento, es

$$p_\alpha p^\alpha = -E^2/c^2 + p^2 = -m^2c^2 \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \quad (24)$$

4.1.5. Cuadrivectores - potencia y fuerza

- ▶ La generalización de la mecánica de Newton se hace con cuadrivectores de fuerza que describen interacciones de forma similar a la segunda ley de Newton,

$$\mathcal{F}^\mu = ma^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (25)$$

- ▶ La aceleración (21) puede separarse en componentes paralela y perpendicular a la velocidad, $\vec{a} = a_{\parallel} \hat{v} + \vec{a}_{\perp}$, donde

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \quad \text{con} \quad \vec{a}_{\parallel} \equiv (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v}, \quad \vec{a}_{\perp} \equiv \hat{v} \times (\vec{a} \times \hat{v}). \quad (26)$$

para obtener de (25),

$$\frac{dE}{dt} = \gamma^3 m \vec{a} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \vec{a}_{\perp} + \gamma^3 m \vec{a}_{\parallel}, \quad (27)$$

- ▶ La componente paralela a la velocidad cambia la energía (“hace trabajo”), siendo más difícil acelerar una partícula linealmente que de forma perpendicular.

4.1.5. Cuadrivectores - luz y fotones

- ▶ La expresión de la derecha en (22) se generaliza a partículas sin masa, como el fotón, donde $E^2 = p^2 c^2$.
- ▶ El fotón tiene asociado el cuadrivector de energía-momento,

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hbar k^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega/c \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

con $\vec{k} = (\omega/c)\hat{k}$ el vector de propagación.

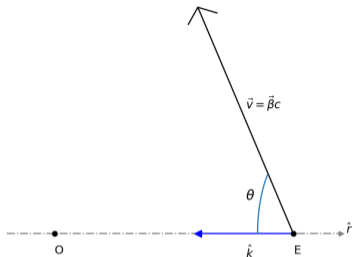
- ▶ La norma nula para la propagación de la luz en el vacío equivale a la relación de dispersión,

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \Rightarrow -\omega^2 + k^2 c^2 = 0,$$

acorde con masa nula y propagación en intervalos nulos, $ds = 0$.

4.1.6. Luz y fotones

Figura 1: Un emisor de luz E se mueve con velocidad $\vec{v} = \vec{\beta}c$ con respecto al observador O, siendo \hat{k} el vector de E a O, inverso a la línea de visión.



- Sea E un emisor de radiación con velocidad $\vec{v} = \vec{\beta}c$, que emite a una frecuencia ω_e en la dirección \hat{k}_e (fig. 1). La relación entre frecuencias observada y emitida está dada por la transformación inversa a (17),

$$\omega_o = \gamma \omega_e \left(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{k}_e \right) = \frac{\omega_e}{\gamma \left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}_o \right)} \quad (29)$$

- La transformación del vector de propagación es la directa,

$$\hat{k}_e = \frac{\hat{k}_o - \gamma \vec{\beta} + (\gamma - 1) (\hat{\beta} \cdot \hat{k}_o) \hat{\beta}}{\gamma \left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}_o \right)} \Rightarrow \hat{\beta} \cdot \hat{k}_e = \cos \theta_e = \frac{\cos \theta_o - \beta}{1 - \beta \cos \theta_o} \quad (30)$$

4.1.6. Luz y fotones - efecto Doppler

- ▶ fuente alejándose en movimiento radial, $\hat{\beta} \cdot \hat{k}_o = -1$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma(1+\beta)} = \omega_e \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \cos \theta_e = -1. \quad (31)$$

La frecuencia observada es menor y corresponde al *corrimiento al rojo*.

- ▶ fuente acercándose en movimiento radial, $\cos \theta_o = +1$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma(1-\beta)} = \omega_e \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \cos \theta_e = +1. \quad (32)$$

La frecuencia observada es mayor y corresponde al *corrimiento al azul*.

- ▶ fuente moviéndose perpendicularmente, $\cos \theta_o = 0$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma}, \quad \cos \theta_e = -\beta. \quad (33)$$

Corrimiento transverso al rojo. Ángulo de emisión observado $\theta_e \neq \theta_o$.

4.1.6. Luz y fotones - beaming

- ▶ De acuerdo a (30), el ángulo observado no coincide con el de emisión en el marco de la fuente,

$$\cos \theta_o = \frac{\beta + \cos \theta_e}{1 + \beta \cos \theta_e}. \quad (34)$$

- ▶ Una fuente de radiación isotrópica, independiente de θ_e , se observa anisotrópica al estar en movimiento, emitiendo en un ángulo sólido dado por,

$$d\Omega_o = 2\pi d(\cos \theta_o) = \frac{d\Omega_e}{\gamma^2(1 + \beta \cos \theta_e)^2}. \quad (35)$$

- ▶ El haz se cierra y se intensifica en la dirección de movimiento, en la que también se corre al azul, dando lugar a una fuerte amplificación de la intensidad → “beaming”.

4.1.6. Luz y fotones - beaming

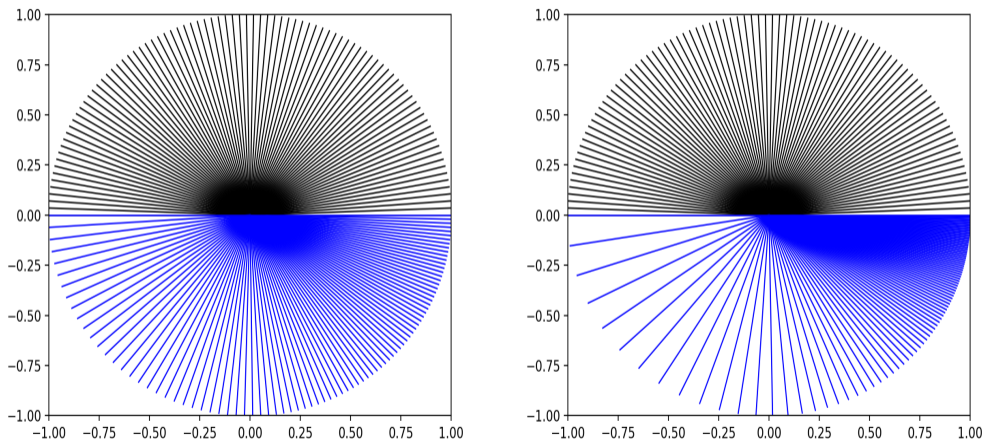


Figura 2: Modificación de un patrón isotrópico para $\beta = 0.5$ y $\beta = 0.9$.

4.1.7. Campos electromagnéticos - potenciales

- ▶ Los campos electromagnéticos pueden ser descritos con los potenciales escalar, ϕ , y vectorial, \vec{A} , combinados en el cuadvivector,

$$A^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

- ▶ Se define también el operador (contravariante) de derivación,

$$\partial_\alpha \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (37)$$

que permite expresar ecuaciones de manera compacta.

- ▶ La norma de Lorenz⁴ es covariante,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (38)$$

Los potenciales que la cumplen lo hacen en cualquier marco de referencia. La norma de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, no es covariante.

⁴por Ludvig Lorenz, físico anterior a Hendrik Lorentz.

4.1.7. Campos electromagnéticos - densidades de carga y corriente

- ▶ Las fuentes de los campos electromagnéticos son las densidades de carga y corriente eléctrica,

$$j^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

- ▶ La ecuación de continuidad se puede expresar en forma covariante,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (40)$$

- ▶ Las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a la ecuación de onda para los potenciales en presencia de fuentes, que se pueden escribir como,

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \iff \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Esta ecuación puede deducir de (44, 46), más adelante. En §4.2 se plantean estas ecuaciones para una carga en movimiento arbitrario.

4.1.7. Campos electromagnéticos - tensores

- ▶ La descripción de campos electromagnéticos requiere introducir tensores:
 - Un tensor de rango 0 es un escalar. Es invariante por construcción.
 - Un tensor de rango 1 es un cuadvivector. Se transforma de forma contravariante o covariante (15,16),

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}, \quad A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} A_{\beta}.$$

- Los tensores de rango 2 se representan con matrices de 4×4 . Pueden ser contravariantes, transformándose de acuerdo a,

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}. \quad (42)$$

covariantes, o mixtos, transformándose de acuerdo a,

$$F'_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} F_{\delta}{}^{\gamma}. \quad (43)$$

- ▶ Y así a tensores de rango arbitrario...

4.1.7. Campos electromagnéticos - tensor de campo EM

- ▶ Los campos electromagnéticos se definen mediante el tensor,

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (44)$$

- ▶ El tensor F es antisimétrico por construcción: $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.
En particular $F^{\alpha\alpha} = 0$.
- ▶ Explícitamente,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

4.1.7. Campos electromagnéticos - ecuaciones de Maxwell

- ▶ Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse de forma covariante,

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0. \quad (46)$$

- ▶ La expresión de la izquierda corresponde a las ecuaciones de Maxwell con fuentes,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

- ▶ La expresión de la derecha en (46) se anula cuando hay índices repetidos,

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \{123\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0;$$

$$\{\alpha\beta\gamma\} \in \{\{012\}, \{013\}, \{023\}\} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

- ▶ La definición del tensor EM, $F^{\alpha\beta}$, junto con la ecuación (46) con fuentes permite obtener la ecuación de onda para los potenciales electromagnéticos (41).

4.1.7. Campos electromagnéticos - transformación

- ▶ El campo electromagnético se transforma según $F^{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\beta} F'^{\gamma\mu}$, de donde,

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{E}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{E}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}'_{\perp} \right), \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel}, & \vec{B}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}'_{\perp} \right).\end{aligned}\quad (47)$$

- ▶ Un campo puramente eléctrico ($\vec{B}' = 0$) o magnético ($\vec{E}' = 0$) se transforma en electromagnético ($\vec{B} \neq 0$, $\vec{E} \neq 0$).
- ▶ El invariante $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$ indica la existencia de un marco donde sólo uno de los dos campos, \vec{E} o \vec{B} , es nulo⁵. Para ondas EM: $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0$.

⁵Otro invariante es el vector de Poynting (§25 "The Classical Theory of Fields", Landau & Lifshitz).

4.1.7. Campos electromagnéticos - fuerza de Lorentz

- ▶ La *fuerza de Lorentz* es producto del tensor de campo electromagnético y el cuadrivector de velocidad,

$$\mathcal{F}^\alpha = (q/c)F^\alpha_\beta u^\beta = (q/c)F^{\alpha\mu} u_\mu. \quad (48)$$

- ▶ Con un poco de álgebra se obtiene de (25),

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (49)$$

A la izquierda es el cambio de energía por el trabajo del campo eléctrico; a la derecha la fuerza de Lorentz, con factor γ .

4.2. Campos de una carga en movimiento

4.2.1. Carga en reposo y en movimiento rectilíneo uniforme.

4.2.2. Potenciales de Liénard-Wiechert.

4.2.3. Fórmula de Larmor y distribución angular de la radiación.

4.2.4. Distribución espectral.

4.2.1. Carga en reposo

- Densidad de carga de un electrón, $q = -e$, en reposo en la posición \vec{r}_e :

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta(\vec{r} - \vec{r}_e), \quad \vec{j} = 0.$$

- El potencial escalar se obtiene de (41), con $\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \rightarrow$ ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (51)$$

- Cambio de variable $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e$ fija el origen en la carga. En coordenadas esféricas,

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{R}) = \rho(R) = -e \delta(R)/R^2,$$

- Se integra (51) sobre una esfera de radio a centrada en $R = 0$,

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\phi}{dR} \right) = 4\pi e \frac{\delta(R)}{R^2} \Rightarrow a^2 \frac{d\phi}{dR}(a) = 4\pi e, \quad \text{para } a > 0.$$

- Al integrar sobre a se obtiene el potencial y el campo de Coulomb,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{-e}{R} = \frac{-e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|}, \quad \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -e \frac{\hat{R}}{R^2} = -e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|^3}, \quad \vec{B} = 0. \quad (52)$$

4.2.1. Carga en movimiento rectilíneo uniforme

- ▶ Sea un electrón en movimiento rectilíneo uniforme, $\vec{r}_e(t) = \hat{x}v_e t$, con $y_e = z_e = 0$.
- ▶ En el marco propio del electrón los potenciales son de Coulomb (52),

$$\phi'(\vec{r}') = \frac{-e}{|\vec{r}' - \vec{r}'_e|} = \frac{-e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \vec{A}' = 0 \quad \text{para} \quad \vec{r}'_e = 0.$$

- ▶ Se transforman de acuerdo a (17),

$$\phi = \gamma\phi' + \gamma\vec{\beta} \cdot \vec{A}' = \gamma\phi', \quad \vec{A} = \gamma\vec{\beta}\phi' + \vec{A}' + (\gamma - 1)(\vec{\beta} \cdot \vec{A}')\hat{\beta} = \gamma\beta\hat{x}\phi',$$

- ▶ Es decir,

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{-e\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - v_e t)^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{-e\gamma\beta\hat{x}}{\sqrt{\gamma^2(x - v_e t)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (54)$$

al transformar también las coordenadas, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$.

4.2.1. Carga en movimiento rectilíneo uniforme

- ▶ Los campos electromagnéticos se derivan de estos potenciales.
- ▶ Alternativamente, se pueden obtener los campos con las transformaciones (52),

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}'_{\perp},$$

aplicadas a un campo de Coulomb.


4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- ▶ El campo electromagnético producido por una carga en movimiento arbitrario se obtiene de las ecuaciones (46), dadas las formas funcionales de $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$.
- ▶ Para un electrón que sigue una trayectoria arbitraria $\vec{r}_e(t)$,

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta[\vec{r} - \vec{r}_e(t)] , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = -e \vec{v}_e(t) \delta[\vec{r} - \vec{r}_e(t)] , \quad (55)$$

con $\delta(\vec{r})$ la función delta de Dirac.

- ▶ Los potenciales A^α se pueden obtener integrando la ecuación de onda (41) mediante el método de la función de Green⁶.
- ▶ Alternativamente, se puede hacer una deducción aprovechando invariantes (Shu §13).

⁶Jackson §12.11 y capítulo 14 muestran la deducción mediante la función de Green. 

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

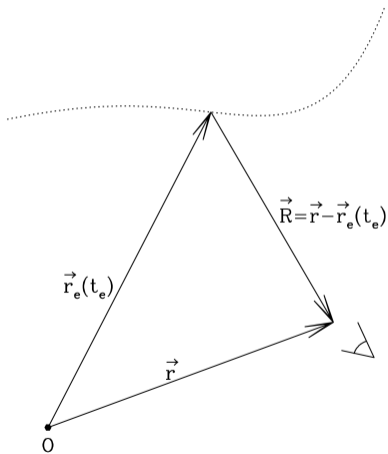


Figura 3: Electrón en movimiento arbitrario visto desde el marco de referencia O. El vector \vec{r} denota la posición donde se mide el campo en el instante t , frecuentemente fija, y $\vec{r}_e(t_e)$ la del electrón en el instante t_e . El vector \vec{R} conecta ambos eventos.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- ▶ Para transformar el potencial Coulombiano del marco en reposo instantáneo con del electrón (O') al del observador (O), consideramos la posición del electrón en un instante t'_e , distinto al tiempo de la medición, t' (fig. 3).
- ▶ Consideramos los potenciales en O' en el instante t'_e ,

$$\phi'(\vec{r}', t') = \frac{-e}{|\vec{r}' - \vec{r}'_e(t'_e)|}, \quad \vec{A}'(\vec{r}', t') = 0, \quad (56)$$

con $A'^\alpha A'_\alpha = -e^2/|\vec{r}' - \vec{r}'_e(t'_e)|^2$ invariante para una elección adecuada de t'_e .

- ▶ La expresión para $\{t_e, t'_e\}$ se obtiene con el cuadvivector que describe el contacto causal entre el electrón y el observador,

$$R^\alpha \equiv \begin{pmatrix} ct - ct_e \\ \vec{r} - \vec{r}_e(t_e) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

siendo, por construcción, $R_\alpha R^\alpha = 0$ en cualquier marco de referencia.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- ▶ Se define el *tiempo retardado*, t_e , a partir de la solución de la expresión,

$$R_\alpha R^\alpha = -c^2(t - t_e)^2 + |\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_e = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)|}{c}. \quad (58)$$

- ▶ La invariancia de $R_\alpha R^\alpha$, vista en el marco de referencia del electrón, implica,

$$R'_\alpha R'^\alpha = -c^2(t' - t'_e)^2 + |\vec{r}' - \vec{r}'_e(t')|^2 = 0,$$

de donde $\phi'(\vec{r}', t') = -e/c(t' - t'_e)$.

- ▶ Por otro lado, el producto de R^α con la velocidad (u^α) de la partícula en $t = t_e$, produce el escalar invariante,

$$u^\alpha R_\alpha = -\gamma c^2(t - t_e) + \gamma \vec{v}_e(t_e) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)) = -c^2(t' - t'_e),$$

con $\vec{v}_e = d\vec{r}_e/dt$.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- ▶ El invariante $u^\alpha R_\alpha$ permite expresar ϕ' en términos de t y t_e ,

$$\phi' = \frac{-e}{\gamma |\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)| - \gamma (\vec{v}_e(t_e)/c) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_e(t_e))} = \frac{-e}{\gamma R (1 - \vec{v}_e(t_e) \cdot \hat{R}/c)},$$

con $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e(t_e)$, la parte espacial de R^α . En general, el vector \vec{r} es fijo.

- ▶ La transformación de Lorentz al marco del observador resulta en los potenciales, escritos en forma covariante,

$$A^\sigma = \frac{-e u^\sigma}{u^\alpha R_\alpha} = \frac{-e}{R (1 - \vec{v}_e \cdot \hat{R}/c)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_e/c \end{pmatrix}. \quad (59)$$

4.2.2. Potenciales de Liénard-Wiechert

- ▶ Los potenciales (59) son covariantes y Coulombianos en el marco del electrón. Se conocen como potenciales de Liénard-Wiechert, también escritos como,

$$\phi(\vec{r}, t) = \left[\frac{-e}{R(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}_e/c)} \right]_{t_e}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \left[\frac{-e \vec{v}_e/c}{R(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}_e/c)} \right]_{t_e}. \quad (60)$$

- ▶ Existe formalmente una solución *avanzada*, correspondiente con la posición futura del electrón en $t_a = t + |\vec{r} - \vec{r}_a(t_a)|/c$.
- ▶ Esta solución se descarta al ser inconsistente con el principio de causalidad.
- ▶ Una versión del principio de causalidad dice que los potenciales retardados corresponden con ondas que divergen de una carga mientras que los potenciales avanzados corresponden con ondas que convergen hacia ella, contrariamente a lo observado en la naturaleza⁷.

⁷Zeh, "The physical basis of the arrow of time"

4.2.2. Potenciales de Liénard-Wiechert

- Los campos correspondientes a los potenciales de Liénard-Weichert son,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{-e}{R^2} \left[\frac{\hat{R} - \vec{\beta}}{\gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} + \frac{-e}{Rc} \left[\frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t),\end{aligned}\quad (61)$$

con $\vec{\beta} = \vec{v}_e/c$, y el movimiento del electrón evaluado en el tiempo retardado,

$$t_e = t - |\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)|/c, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_e(t_e)|.$$

- El campo tiene dos componentes:
- el “campo de velocidad” ($\propto 1/R^2$), generalización del campo de Coulomb;
 - el “campo de aceleración” ($\propto 1/R$), o “campo de radiación”,

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{-e}{Rc} \left[\frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}, \quad \vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = \hat{R} \times \vec{E}_{rad}(\vec{r}, t). \quad (62)$$

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- ▶ El flujo de energía está dado por el vector de Poynting del campo de radiación,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 \hat{R}, \quad (63)$$

aprovechando $\{\vec{E}_{rad} \perp \vec{B}_{rad}\} \perp \hat{R}$.

- ▶ La potencia radiada por el electrón,

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 R^2 d\Omega. \quad (64)$$

Dado $|\vec{E}_{rad}| = |\vec{B}_{rad}| \propto 1/R$, la radiación se diluye $\propto 1/R^2$.

- ▶ La distribución angular de la radiación,

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_{rad}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2, \quad (65)$$

con $\{\vec{r}_e, \vec{\beta} = \vec{v}_e/c, \vec{a}\}$ evaluados en el tiempo retardado t_e .

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert - geometría

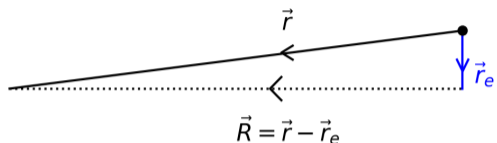


Figura 4: Origen de referencia O tal que $r_e \ll r$. El origen está en el punto negro, cercano a la carga, situada en \vec{r}_e . El punto de medición está a la izquierda, en \vec{r} .

- ▶ En problemas astrofísicos la distancia (r) entre el observador y región de emisión mucho mayor que las dimensiones de dicha región, la cual define la escala $r_e \ll r$.
- ▶ Partiendo de $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e \Rightarrow R = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_e + r_e^2}$, podemos aproximar

$$R \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e), \quad t_e \approx t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c. \quad (66)$$

A orden cero $R \approx r$, con la posición del observador, \vec{r} , un vector fijo (fig. 4).

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

La distribución angular de la potencia radiada (65), bajo la aproximación (66),

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{\hat{r} \times \left((\hat{r} - \vec{\beta}) \times \vec{a} \right)}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2, \quad (67)$$

Analizamos $dP/d\Omega$ para partículas no relativistas (a) y relativistas (b).

(a) Partícula no relativista: fórmula de Larmor

Para una carga en movimiento no-relativista ($\beta \ll 1$), los campos de radiación son:

$$\vec{E}_{rad} \simeq -\frac{e}{c^2} \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})}{r}, \quad \vec{B}_{rad} \simeq \frac{e}{c^2} \frac{\hat{r} \times \vec{a}}{r}, \quad (68)$$

bajo la aproximación $t_e \approx t - r/c$. La potencia radiada por ángulo sólido es,

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_{rad}|^2 \simeq \frac{e^2}{4\pi c^3} |\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})|^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (69)$$

con θ el ángulo entre la línea de visión, \vec{r} , y la aceleración, \vec{a} .

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

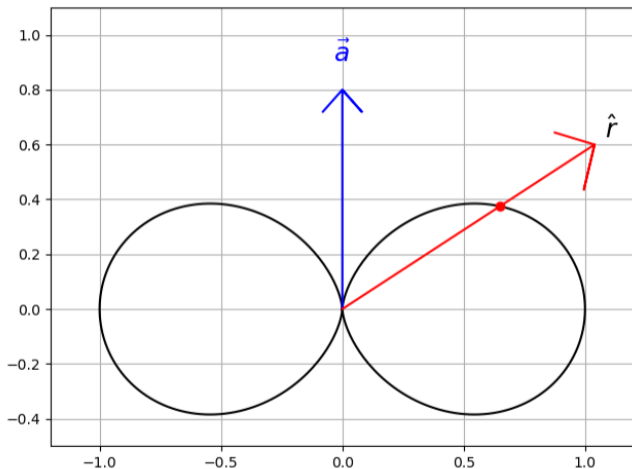


Figura 5: Emisión de una partícula no relativista. El patrón es dipolar, con simetría acimutal.

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

(a) Partícula no relativista: fórmula de Larmor

- ▶ El patrón de emisión es dipolar y se anula para $\theta \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow \hat{r} = \pm \hat{a}$.
- ▶ Al integrar sobre $d\Omega$ se obtiene,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \quad \Rightarrow \quad P(t) \simeq \frac{2 e^2 a^2}{3 c^3}. \quad (70)$$

Esta es la expresión no relativista de la *fórmula de Larmor*.

En resumen:

- (i) la potencia es proporcional al cuadrado de la carga y aceleración, $P \propto a^2 e^2$;
- (ii) la emisión tiene un patrón *dipolar* ($\propto \sin^2 \theta$), que se altera en el caso relativista;
- (iii) si \vec{a} tiene dirección fija, entonces $\vec{E} \propto \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$ es fijo y la polarización es lineal.

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

(b) Partícula relativista

- ▶ Para una **partícula relativista** la fórmula de Larmor (70) se generaliza a la expresión covariante,

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu a^\mu \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\gamma^4 a_\perp^2 + \gamma^6 a_\parallel^2 \right), \quad (71)$$

con $\{a_\parallel, a_\perp\}$ componentes de \vec{a} paralela y perpendicular a la velocidad (ec. 27).

- ▶ El patrón de emisión relativista está dado por la expresión general (67),

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{\hat{r} \times \left((\hat{r} - \vec{\beta}) \times \vec{a} \right)}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2.$$

- ▶ Se analizan los casos $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, y $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

(b.1) Partícula relativista: patrones de emisión: $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$

- ▶ Desaparece la velocidad en la parte superior de la expresión (67),

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}.$$

- ▶ La figura 6 ilustra los casos semi-relativista y el límite $\gamma \rightarrow \infty$.
- ▶ Los puntos extremos son: $\sin \theta_{min} = 0$, donde la emisión se anula; y el máximo en,

$$\cos \theta_{max} = (\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1)/4\beta \quad \Rightarrow \quad \theta_{max}(\gamma \rightarrow \infty) \rightarrow 1/\gamma\sqrt{5}.$$

- ▶ El límite ultrarelativista se estima para $\gamma \gg 1$, $\theta \ll 1$,

$$\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2, \quad \sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2,$$

de donde

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} \rightarrow \frac{16e^2}{\pi c^3} \gamma^{10} \frac{\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^6}.$$

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

- (b.1) Patrones de emisión relativista: $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$:

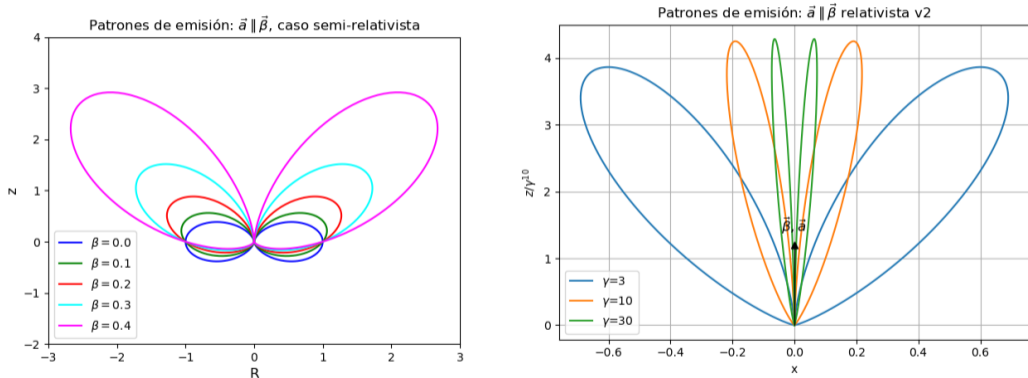


Figura 6: Emisión para $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, con la aceleración es paralela al eje \hat{z} . Casos moderadamente relativista (izq) y relativista, escala por γ^{10} (der).

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

(b.2) Partícula relativista: patrones de emisión: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

- ▶ Se sitúan la aceleración y velocidad en direcciones perpendiculares,

$$\vec{a} = a\hat{x}, \quad \vec{\beta} = \beta\hat{z}, \quad \hat{r} = \hat{z} \cos \theta + (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \sin \theta.$$

- ▶ Con estas definiciones, la expresión (67) queda

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \left[\frac{(\cos \theta - \beta)^2 + \sin^2 \phi \sin^2 \theta / \gamma^2}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \right].$$

- ▶ Los patrones son dipolares, $dP/d\Omega = f_0(\theta) + f_1(\theta) \sin^2 \phi$, oscilando entre un mínimo, $\sin^2 \phi = 0 \rightarrow dP/d\Omega = f_0$, y máximo, $\sin^2 \phi = 1 \rightarrow dP/d\Omega = f_0 + f_1$.
- ▶ Estas funciones se muestran en la figura 7.
- ▶ La emisión máxima se da en $\theta = 0$, con la expresión asintótica $\theta \ll 1, \gamma \rightarrow \infty$,

$$\frac{dP}{d\Omega} \rightarrow \frac{4e^2 a^2}{\pi c^3} \gamma^8 \left[\frac{(1 - \gamma^2 \theta^2)^2 + 4\gamma^2 \theta^2 \sin^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^6} \right].$$

- ▶ La figura 8 muestra las dos componentes y la suma, siendo $\langle \sin^2 \phi \rangle = 1/2$.

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

► (b.2) Patrones de emisión relativista: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$:

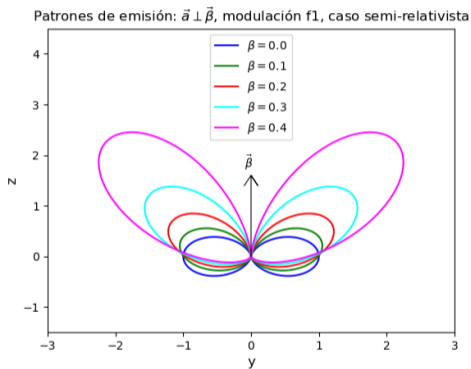
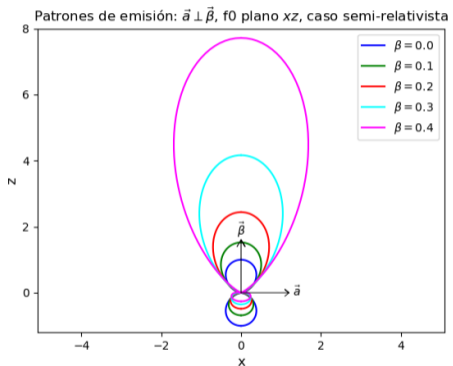


Figura 7: Emisión para $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, caso moderadamente relativista: componente f_0 para $\sin \phi = 0$ (izquierda) y componente f_1 (derecha). En la gráfica de la derecha \vec{a} apunta hacia el lector. La emisión total es $f_0 + f_1 \sin^2 \phi$.

4.2.3. Fórmula de Larmor; distribución angular de la radiación

- (b.2) Patrones de emisión relativista para $\vec{a} \perp \vec{\beta}$:

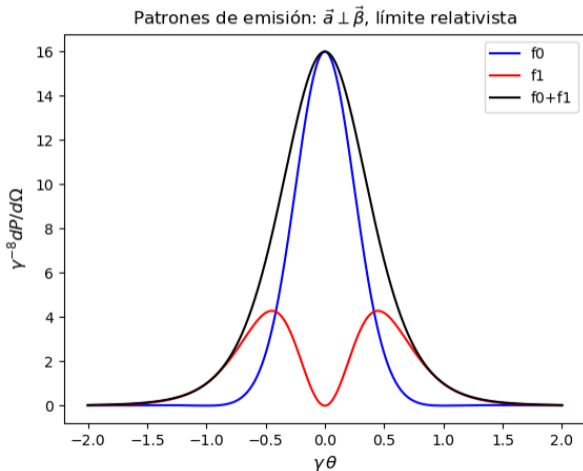


Figura 8: Patrones de emisión para una carga con $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, en el caso límite relativista, con la componente f_0 en azul y f_1 en rojo. La curva en negro representa la integración sobre $d\phi$, siendo $\langle \sin^2 \phi \rangle = 1/2$.

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- ▶ La potencia describe la energía radiada por unidad de tiempo, $P(t) = d\mathcal{E}/dt$; el espectro, $P(\omega) = d\mathcal{E}/d\omega$, la distribución en frecuencias. Considerando la distribución angular se tiene,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} d\omega, \quad (72)$$

donde las frecuencias negativas no contribuyen.

- ▶ De (65), considerando que para \vec{E} real $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega)$, se obtiene,

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}(t)|^2 dt = \frac{c}{2\pi} \int_0^{+\infty} |R\vec{E}(\omega)|^2 d\omega,$$

donde $R\vec{E}(t)$ y $R\vec{E}(\omega)$ se relacionan mediante la transformada de Fourier,

$$R\vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(t) e^{i\omega t} dt, \quad R\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (73)$$

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- ▶ La expresión (62) para el campo de radiación da,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\hat{R} \times \{(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

- ▶ Aproximando $R \simeq r$, $t \simeq t_e + r/c - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c$, se cambia de variable $dt = (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{r}) dt_e$, y, despreciando el término $e^{i\omega r/c}$ (de fase),

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\hat{r} \times \{(\hat{r} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^2} \right] e^{i\omega(t_e - \hat{r} \cdot \vec{r}_e/c)} dt_e \right|^2.$$

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- ▶ Jackson (§14) afirma que el término en paréntesis es una diferencial exacta,

$$\left[\frac{\hat{r} \times \{(\hat{r} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta}} \right],$$

permitiendo integrar por partes y reducir la expresión a,

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2. \quad (74)$$

- ▶ El espectro integrado sobre ángulo sólido representa la expresión general para el espectro de una partícula en movimiento,

$$P(\omega) = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \int \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2 d\Omega. \quad (75)$$

4.3. Sistemas de cargas en movimiento

4.3.1. Aproximación dipolar.

4.3.2. Expansión multipolar.

4.3.1. Aproximación dipolar

- ▶ Sistemas de cargas en movimiento no relativista se pueden describir generalizando la expresión de Larmor (70), al definir el momento dipolar del sistema, \vec{d} ,

$$P(t) = \sum_i \frac{2q_i^2 a_i^2}{3c^3} = \frac{2|\ddot{\vec{d}}(t)|^2}{3c^3}, \quad \vec{d}(t) = \sum_i q_i \vec{r}_i(t) = \int \rho(\vec{r}, t) \vec{r} d^3r. \quad (76)$$

- ▶ La expresión (68) para los campos y la distribución angular se generaliza,

$$\vec{E}_{rad}(t) = \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})}{rc^2}, \quad \vec{B}_{rad}(t) = -\frac{\hat{r} \times \ddot{\vec{d}}}{rc^2}, \quad \frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (77)$$

con \vec{r} la posición del observador con respecto al centro de la distribución de carga.

- ▶ El espectro se obtiene al transformar el campo eléctrico,

$$\vec{E}_{rad}(\omega) = -\frac{\omega^2}{rc^2} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{d}(\omega)), \quad \vec{B}_{rad}(\omega) = \frac{\omega^2}{rc^2} \hat{r} \times \vec{d}(\omega), \quad (78)$$

con $\vec{d}(\omega)$ la transformada de $\vec{d}(t)$. El factor $-\omega^2$ proviene de su segunda derivada.

4.3.1. Aproximación dipolar

- ▶ Ignorando el término $\hat{r} \cdot \vec{r}_e/c$ en la exponencial armónica (74),

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\pi c^3} \left| \vec{d}(\omega) \right|^2 \sin^2 \theta, \quad P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3} \left| \vec{d}(\omega) \right|^2. \quad (79)$$

- ▶ La aproximación dipolar es válida para conjuntos de cargas no relativistas acotadas a una región de tamaño $L \ll r$.
- ▶ Una aplicación directa es la emisión de frenado, o *bremsstrahlung*.

4.3.2. Expansión multipolar - desarrollo

- ▶ Un tratamiento general de los campos debidos a una distribución de carga no estática considera el principio de superposición,

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\alpha(\vec{x}, t')}{|\vec{r} - \vec{x}|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{x}|}{c}\right) d^3x dt'. \quad (80)$$

con $A^0 = \phi$, $j^0 = \rho c$, $A^i \rightarrow \vec{A}$, $j^i \rightarrow \vec{j}c$. La distribución de cargas y corrientes se sitúa en \vec{x} y se evalúa en el tiempo retardado, t' , a través de la función δ .

- ▶ Se aproxima $|\vec{r} - \vec{x}| \approx r$ para la distancia, $|\vec{r} - \vec{x}| \approx r - \vec{r} \cdot \vec{x}$ en el tiempo retardado,

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, t') \delta\left(t' - t + \frac{r}{c} - \frac{\hat{r} \cdot \vec{x}}{c}\right) d^3x dt'. \quad (81)$$

- ▶ Se considera la transformada de Fourier de estos potenciales,

$$A^\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, t') \delta\left(t' - t + \frac{r}{c} - \frac{\hat{r} \cdot \vec{x}}{c}\right) e^{i\omega t} d^3x dt' dt.$$

4.3.2. Expansión multipolar - desarrollo

- ▶ Se integra la transformada de Fourier de los potenciales, sobre t , aprovechando la función δ , para obtener

$$\begin{aligned} A^\alpha(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, t') e^{i\omega(t' - r/c + \hat{r} \cdot \vec{x}/c)} d^3x dt' \\ &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, \omega) e^{i\omega \hat{r} \cdot \vec{x}/c} d^3x. \end{aligned} \quad (82)$$

- ▶ Al desarrollar en serie la exponencial se obtiene la expansión multipolar,

$$A^\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^n \int (\hat{r} \cdot \vec{x})^n j^\alpha(\vec{x}, \omega) d^3x. \quad (83)$$

- ▶ La expansión cual converge rápidamente para

$$\left| \frac{\omega \vec{x}}{c} \right| \ll 1 \Rightarrow x \ll \lambda.$$

4.3.2. Expansión multipolar - condición de convergencia

- ▶ La condición de convergencia, $x \ll \lambda$, no parece obvia en entornos astrofísicos.
- ▶ Cargas en movimiento no relativista abarcan regiones de dimensiones

$$x \lesssim L \sim v/\omega = v(\lambda/2\pi c) \ll \lambda/2\pi.$$

- ▶ En algunos sistemas macroscópicos, por ejemplo estrellas de neutrones, no se cumple $x \ll \lambda$. Aún ahí, la expresión general (82) es aplicable.
- ▶ Lejos de la zona de emisión, el campo se comporta como superposición de ondas planas. Se puede describir con el potencial vectorial \vec{A} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = \vec{B} \times \hat{r}.$$

Al omitir términos en r^{-2} , se tiene,

$$\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}/c, \quad \vec{E} = (\ddot{\vec{A}} \times \hat{r}) \times \hat{r}/c,$$

como en el caso dipolar (77, 86).

4.3.2. Expansión multipolar - momento dipolar eléctrico

La expansión en serie (83) da lugar a los momentos multipolares.

- ▶ $n = 0 \Rightarrow$ momento **dipolar eléctrico**: partiendo de

$$\int \vec{j}(\vec{x}, t) d^3x = \int \dot{\vec{x}}\rho(\vec{x}, t) d^3x \quad \Rightarrow \quad \int \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x = -i\omega \int \vec{x}\rho(\vec{x}, \omega) d^3x.$$

se obtiene el potencial vectorial,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \int \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} (-i\omega) \vec{d}(\omega). \quad (84)$$

- ▶ Los campos correspondiente están dados por,

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = -\frac{i\omega}{c} \vec{A} \times \hat{r} = -e^{-i\omega r/c} \left(\frac{\omega^2}{rc^2} \right) \vec{d}(\omega) \times \hat{r}, \quad \vec{E} = \vec{B} \times \hat{r}. \quad (85)$$

- ▶ Podemos transformar de vuelta el potencial y los campos en función del tiempo,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{rc} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}}{rc^2}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{(\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}) \times \hat{r}}{rc^2}. \quad (86)$$

4.3.2. Expansión multipolar - momentos superiores

- ▶ $n = 1 \Rightarrow$ **momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico:**
- el término $n = 1$ de la expansión es,

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c} \right) \int (\hat{r} \cdot \vec{x}) \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x.$$

- La identidad $(\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r} = (\hat{r} \cdot \vec{x})\vec{j} - (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{x}$, permite separar la integral como,

$$(\hat{r} \cdot \vec{x}) \vec{j} = \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r} + \frac{1}{2} (\hat{r} \cdot \vec{x}) \vec{j} + \frac{1}{2} (\hat{r} \cdot \vec{j}) \vec{x}. \quad (87)$$

- ▶ El término $\propto \vec{x} \times \vec{j}$ corresponde al momento dipolar magnético.
- ▶ Los otros dos términos corresponden al momento cuadrupolar eléctrico.

4.3.2. Expansión multipolar - momento dipolar magnético

- ▶ $n = 1 \Rightarrow$ **momentos dipolar magnético**

El término en $(\vec{x} \times \vec{j})$ corresponde al **momento dipolar magnético**,

$$\vec{A}_{dm}^{(1)}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c} \right) \int \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r} d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c} \right) \vec{m} \times \hat{r}, \quad (88)$$

definiendo el dipolo magnético como,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{x} \times \vec{j}) d^3x. \quad (89)$$

- ▶ Los campos electromagnéticos asociados están dados por

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (\vec{m} \times \hat{r}) \times \hat{r}, \quad \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{r} \times \vec{m},$$

con $dP/d\Omega \propto \omega^4 |\vec{m}(\omega)|^2 \sin^2 \theta$, siendo θ el ángulo entre $\vec{m}(\omega)$ y \hat{r} .

4.3.2. Expansión multipolar - momento cuadrupolar eléctrico

- ▶ $n = 1 \Rightarrow$ momento **cuadrupolar eléctrico**.

La parte dentro de los corchetes cuadrados en (87) da lugar a,

$$\begin{aligned} \vec{A}_{qe}^{(1)}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c} \right) \frac{1}{2} \int [(\hat{r} \cdot \vec{x}) \vec{j} + (\hat{r} \cdot \vec{j}) \vec{x}] d^3x, \\ &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c} \right) \frac{(-i\omega)}{2} \int \vec{x} (\hat{r} \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x}) d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{\omega^2}{6c} \right) \vec{Q}(\hat{r}), \end{aligned} \quad (90)$$

con \mathbf{Q} tensor de momento cuadrupolar eléctrico, definido simétrico con traza cero,

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}) d^3x, \quad \vec{Q}(\hat{r}) = \mathbf{Q} \cdot \hat{r} \Rightarrow Q(\hat{r})_i = \sum_j Q_{ij} r_j. \quad (91)$$

- ▶ Los campos correspondientes son,

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = -ie^{-i\omega r/c} \left(\frac{\omega^3}{c^3} \right) \frac{\vec{Q}(\hat{r}) \times \hat{r}}{6r}, \quad \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -ie^{-i\omega r/c} \left(\frac{\omega^3}{c^3} \right) \frac{(\vec{Q}(\hat{r}) \times \hat{r}) \times \hat{r}}{6r}.$$

4.3.2. Expansión multipolar - expansión

- ▶ El potencial vectorial en función del tiempo y desarrollado hasta $n = 1$,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{rc} + \frac{\dot{\vec{m}} \times \hat{r}}{rc} + \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}(\hat{r})}{6rc^2} + \dots, \quad (92)$$

- ▶ Los campos electromagnéticos quedan como,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \left\{ \ddot{\vec{d}} \times \hat{r} + (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}}(\hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right\}, \quad (93)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \left\{ (\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \hat{r} \times \ddot{\vec{m}} + \frac{1}{6c} (\ddot{\vec{Q}}(\hat{r}) \times \hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right\}. \quad (94)$$

- ▶ El desarrollo multipolar resulta en la expansión para la potencia,

$$P(t) = \frac{2|\dot{\vec{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\dot{\vec{m}}|^2}{3c^3} + \frac{\|\ddot{\vec{Q}}\|^2}{180c^5} + \dots \Rightarrow P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3} (|\dot{\vec{d}}|^2 + |\dot{\vec{m}}|^2) + \frac{\omega^6}{90c^5} \|\ddot{\vec{Q}}\|^2 + \dots, \quad (95)$$

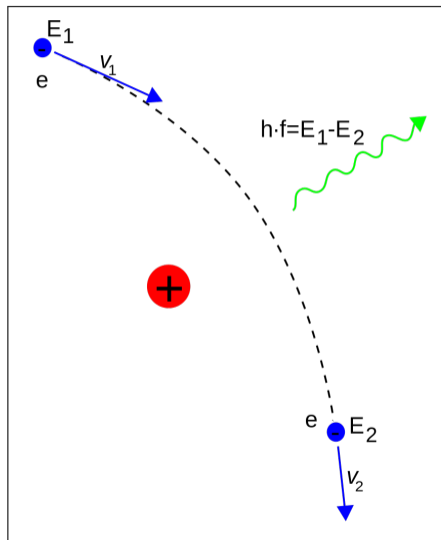
- ▶ Para continuar la expansión conviene expresar (82, 83) con armónicos esféricos.

4.4. Bremsstrahlung

- 4.4.1. Deflexión de un electrón por un núcleo.
- 4.4.2. Deflexiones pequeñas.
- 4.4.3. Movimiento hiperbólico.
- 4.4.4. Bremsstrahlung térmico.
- 4.4.5. Absorción libre-libre.
- 4.4.6. Bremsstrahlung relativista.

4.4. Bremsstrahlung

- ▶ La radiación debida a la deflexión Coulombiana entre cargas se conoce como *bremsstrahlung*, radiación de frenado o *radiación libre-libre*.
- ▶ El bremsstrahlung es un mecanismo de enfriamiento importante en plasmas astrofísicos.
- ▶ La interacción se trata de manera clásica si la energía radiada es mucho menor que la energía inicial del sistema; el caso opuesto requiere un formalismo cuántico.
- ▶ Para movimientos no relativistas ($v \ll c$) se emplea la aproximación dipolar.
- ▶ Dos partículas de misma carga y masa no tienen dipolo \Rightarrow la interacción entre dos electrones es cuadrupolar.



4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - planteamiento clásico

- ▶ Si la energía radiada es despreciable frente a la energía total, podemos describir la interacción entre dos cargas con la solución clásica del problema de dos cuerpos bajo el potencial de Coulomb.
- ▶ Se conservan energía y momento angular:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 + \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad \vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2, \quad (96)$$

con $m_1 = m_e$, $q_1 = -e$, $m_2 = Am_p$, $q_2 = Ze$.

- ▶ El problema se reduce con la posición relativa, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, y la masa reducida $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, considerando conservación de energía y momento angular,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{Ze^2}{r}, \quad \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}. \quad (97)$$

- ▶ El movimiento relativo coincide prácticamente con el electrón: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_e$, $m \rightarrow m_e$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - parámetros

- ▶ Fijando $\vec{L} = L\hat{z}$, se describe el movimiento en el plano $\{r, \varphi\}$,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r}, \quad L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (98)$$

Trayectorias $r(\varphi)$ elípticas⁸ ($\mathcal{E} < 0$), parabólicas ($\mathcal{E} = 0$), o hiperbólicas ($\mathcal{E} > 0$).

- ▶ La solución para $\mathcal{E} > 0$ es la hipérbola dada por,

$$r(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cos \varphi + 1}, \quad (99)$$

con semi-eje mayor y excentricidad,

$$a = \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}}, \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2\mathcal{E}L^2}{mZ^2e^4}\right)^{1/2} > 1.$$

- ▶ La hipérbola tiene asíntotas dadas por las rectas: $x = a\varepsilon \pm y/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

⁸Órbitas cerradas requieren una descripción cuántica.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - trayectoria

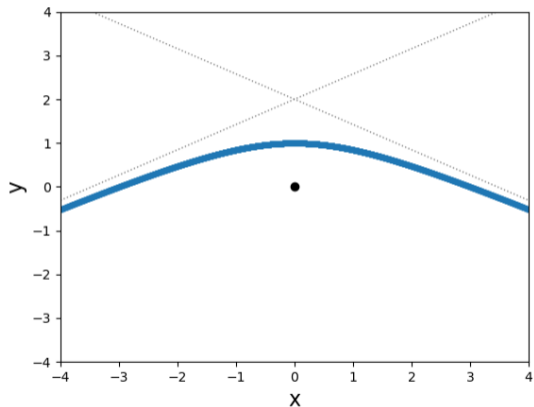


Figura 9: Movimiento de una carga en un campo central Coulombiano, para $a = 1, \varepsilon = 2 \Rightarrow \Delta\theta = 60^\circ$. El centro de atracción está en el origen, el parámetro de impacto es $b = \sqrt{3}$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - parámetro de impacto

- ▶ Conviene emplear como parámetros la velocidad inicial, v_0 , y el parámetro de impacto, b , relacionados con la energía y el momento angular mediante,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad L = mbv_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (100)$$

- ▶ La escala de tiempo de interacción es

$$\tau = \frac{Ze^2}{mv^3} = \frac{a}{v} = \frac{b/v}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (101)$$

- ▶ En el caso de deflexiones pequeñas se puede emplear alternativamente $\tau = b/v$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - límites

- ▶ La aproximación clásica (no-cuántica) es válida para,

$$L \gg \hbar \quad \Rightarrow \quad b \gg \frac{\hbar}{mv_0}. \quad (102)$$

- ▶ Las asíntotas de la hipérbola, dadas por $x = a\epsilon \pm y/\sqrt{\epsilon^2 - 1}$, dan deflexiones pequeñas si,

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{Ze^2}{bmv_0^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad b \gg \frac{Ze^2}{mv_0^2}, \quad (103)$$

siendo $\Delta\varphi$ el ángulo entre asíntotas.

- ▶ La cota de deflexiones pequeñas implica un tratamiento clásico si

$$\frac{Ze^2}{mv_0^2} \gg \frac{\hbar}{mv_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{c} \ll Z\alpha, \quad (104)$$

con $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ la constante de estructura fina.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

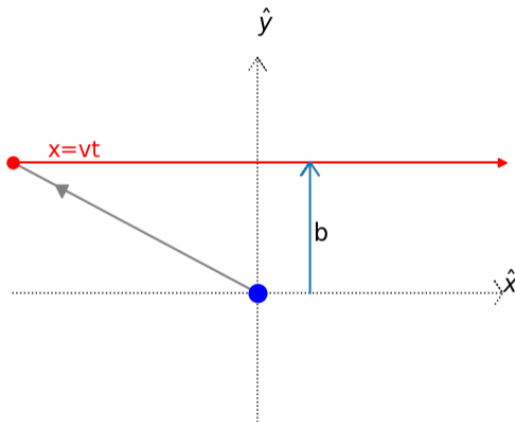


Figura 11: Trayectoria en una interacción con deflexión pequeña.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

- ▶ Consideramos una trayectoria rectilínea a velocidad constante, $\vec{r}(t) = \hat{x} vt + \hat{y} b$.
- ▶ Parametrizamos el tiempo en términos de $\tau = b/v$.
- ▶ Se requiere la transformada del dipolo eléctrico $\vec{d} = -e\vec{r}$ que se obtiene de transformar $\ddot{\vec{d}} = -e\ddot{\vec{a}}$ en $-\omega^2\vec{d}(\omega)$,

$$-\omega^2\vec{d}(\omega) = \frac{-e}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (107)$$

- ▶ La aceleración está dada por,

$$m\vec{a}(t) = -\frac{Ze^2}{r^2} \hat{r} = -Ze^2 \frac{(\hat{x} vt + \hat{y} b)}{[v^2 t^2 + b^2]^{3/2}} \Rightarrow \vec{a}(t) = -\frac{Ze^2}{mb^2} \frac{(\hat{x} t/\tau + \hat{y})}{\left[(t/\tau)^2 + 1\right]^{3/2}}.$$

- ▶ Se hace el cambio de variable $s = vt/b$,

$$\vec{d}(\omega) = \frac{e}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{Ze^2}{mb^2}\right) \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x} s + \hat{y}}{(s^2 + 1)^{3/2}} \exp\{-i\omega\tau s\} ds. \quad (108)$$

4.4.2. Deflexiones pequeñas - movimiento y aceleración

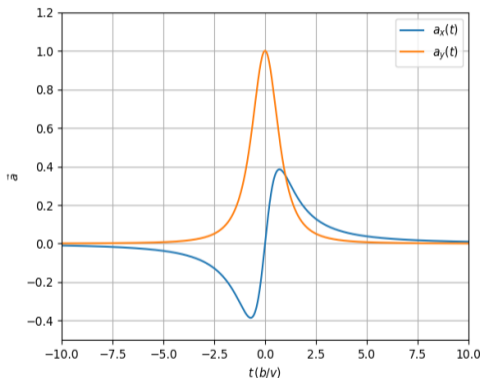
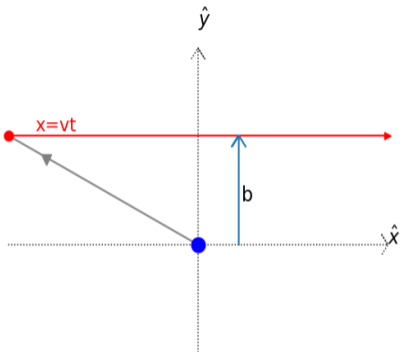


Figura 12: Trayectoria y aceleración en una interacción con deflexión pequeña. El tiempo característico de interacción es $\tau = b/v$.

4.4.2. Deflexiones pequeñas - espectro por un electrón

La interacción dura un tiempo $t \sim \tau = b/v$, actuando en frecuencias $\omega\tau \lesssim 1$.

- ▶ Para $\omega\tau \gg 1$, la exponencial compleja oscila muy rápidamente, cancelando términos sucesivos en la integración. La integral tiende a un valor muy pequeño.
- ▶ Para $\omega\tau \ll 1$, se aproximamos la exponencial a uno, resultando en $d_x(\omega) \rightarrow 0$, y la integral sobre la componente \hat{y} igual a 2, de donde

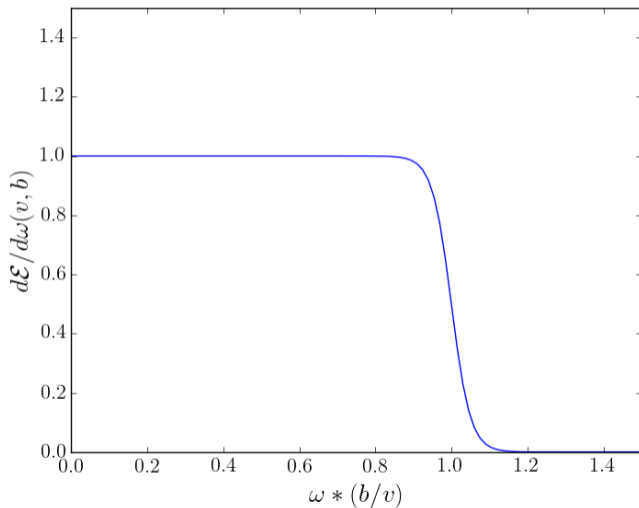
$$\vec{d}(\omega) \approx \begin{cases} -(e/\omega^2\sqrt{2\pi})(2Ze^2/mbv) \hat{y} & \text{para } \omega\tau \ll 1, \\ 0 & \text{para } \omega\tau \gg 1. \end{cases} \quad (111)$$

De aquí la energía radiada por unidad de frecuencia en la colisión de un electrón con velocidad v , parámetro de impacto b , con un núcleo de carga $+Ze$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v, b) = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\vec{d}(\omega)|^2 = \begin{cases} 8Z^2 e^6 / 3\pi m^2 c^3 v^2 b^2 & \text{para } \omega\tau \ll 1, \\ 0 & \text{para } \omega\tau \gg 1, \end{cases} \quad (112)$$

El espectro es independiente de ω a primer orden, excepto por el corte para $\omega\tau \gg 1$.

4.4.2. Deflexiones pequeñas - espectro por un electrón



Espectro bremsstrahlung de un electrón.

4.4.2. Deflexiones pequeñas - en un plasma

- ▶ La emisividad de un plasma con densidad de iones n_i , densidad de electrones n_e , considera el flujo de electrones de velocidad v incidiendo en un anillo de radio b y ancho db alrededor de cada núcleo:

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\omega} = n_i n_e v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v, b) 2\pi b db = \frac{16}{3\pi} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} n_e n_i \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right), \quad (113)$$

donde el rango finito de b asegura la convergencia de la integral.

- ▶ El límite superior viene dado por: $\omega\tau \approx 1 \Rightarrow b_{max} \approx v/\omega$.
- ▶ Dos opciones a considerar para el límite inferior:
 - (1) deflexiones pequeñas, $b_{min}^{(1)} \equiv Ze^2/mv^2$;
 - (2) el límite cuántico, $b_{min}^{(2)} \equiv \hbar/mv$.
 - ▶ Al considerar $b_{min}^{(1)} \gg b_{min}^{(2)}$ suponemos $v/c \ll Z\alpha \simeq Z/137$.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

- ▶ El resultado (113) puede escribirse de forma general definiendo el *factor de Gaunt*, $g_{ff}(v, \omega)$, tal que

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} n_e n_i g_{ff}(v, \omega). \quad (114)$$

- ▶ Para deflexiones pequeñas ($v/c \ll \alpha Z$),

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{mv^3 / Ze^2}{\omega} \right), \quad (115)$$

válida para $\omega \ll mv^3 / Ze^2 = v / b_{min}$.

- ▶ La condición de que energía radiada sea mucho menor que \mathcal{E} viene siendo $(d\mathcal{E}/d\omega)(v/b) \ll mv^2/2$, que se traduce en

$$b \gg \frac{Ze^2}{mv^2} \left(\frac{v}{c} \right) \left(\frac{16}{3\pi Z} \right)^{1/3}, \quad (116)$$

la cual se cumple para deflexiones pequeñas y movimiento no relativista.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

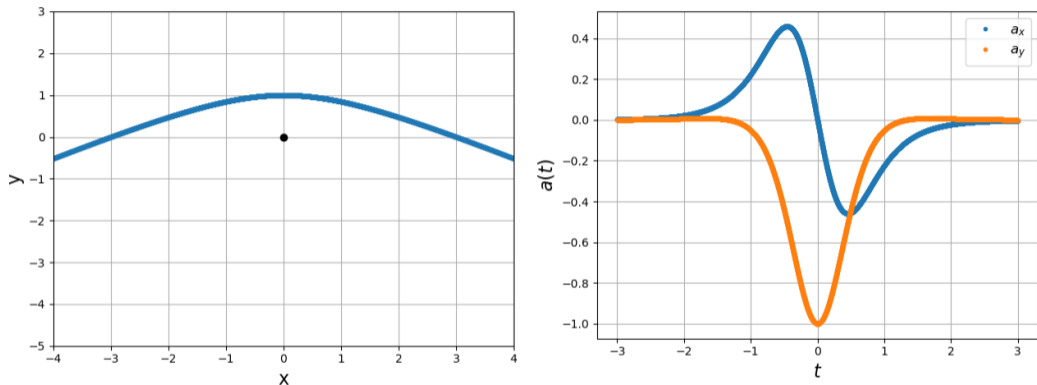


Figura 14: Izquierda: trayectoria hiperbólica de una carga en el campo de un núcleo. Siguiendo la parametrización (117), se usó $\varepsilon = 2$ (\rightarrow parámetro de impacto $b = \sqrt{3}$), $\psi \in (-3, +3)$. Al igual que para deflexiones pequeñas, $x(t)$ es impar mientras que $y(t)$ es par. Derecha: componentes de aceleración. La componente a_y representa la contribución dominante al proceso.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

- ▶ Un tratamiento más preciso⁹ se basa en el movimiento hiperbólico descrito con ecuaciones paramétricas. En coordenadas cartesianas,

$$x = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sinh \psi, \quad y = a(\varepsilon - \cosh \psi), \quad t = \tau(\varepsilon \sinh \psi - \psi). \quad (117)$$

con $a = Ze^2/2\mathcal{E}$, $\tau = Ze^2/mv^3 = a/v$, $\psi \in (-\infty, +\infty)$.

- ▶ Se puede verificar $v_0 = a/\tau$, $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.
- ▶ El espectro se obtiene de (79), con $\vec{d}(\omega) = m\vec{r}(\omega)(q_1/m_1 - q_2/m_2) \approx -e\vec{r}(\omega)$.
- ▶ El cálculo de $\vec{r}(\omega)$ es más directo integrando las velocidades,

$$\begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cosh \psi \\ -\sinh \psi \end{pmatrix} \exp\{i\omega\tau(\psi - \varepsilon \sinh \psi)\} d\psi.$$

⁹“The Classical Theory of Fields”, Landau & Lifshitz, §70.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico

- ▶ Las integrales quedan como

$$x(\omega) = -i \frac{a}{\omega} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} H_{i\omega\tau}^{(1)}(i\omega\tau\varepsilon), \quad y(\omega) = i \frac{a}{\omega} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} H_{i\omega\tau}^{(1)'}(i\omega\tau\varepsilon),$$

con $H_p^{(1)}$ la primera función de Hankel de orden p , y $H_p^{(1)'}$ su derivada,

$$H_p^{(1)}(ix) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\psi - ix \sinh \psi} d\psi.$$

- ▶ La distribución espectral debida a una colisión es análoga a (112),

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2\pi e^2 a^2 \omega^2}{3c^3} \left(|H_{i\omega\tau}^{(1)'}(i\omega\tau\varepsilon)|^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} |H_{i\omega\tau}^{(1)}(i\omega\tau\varepsilon)|^2 \right). \quad (118)$$

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - plasma

- ▶ En el caso de un plasma con densidades de electrones e iones $\{n_e, n_i\}$, se integra sobre parámetros de impacto, o de manera equivalente sobre $a^2 \varepsilon d\varepsilon = b db$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega dV dt} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^6}{3m^2 c^3 v} n_e n_i \omega \tau |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)| H_{i\omega\tau}(i\omega\tau). \quad (119)$$

Que corresponde con la expresión general (114) con un factor de Gaunt

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \omega \tau |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)| H_{i\omega\tau}(i\omega\tau). \quad (120)$$

- ▶ Presuntamente, para $\omega\tau, \omega\tau\varepsilon \ll 1$ se tiene $H_p(i\omega\tau\varepsilon) \rightarrow (2/i\pi) \ln(2/\gamma\omega\tau\varepsilon)$, $2\pi(\omega\tau)^2(|H'|^2 + (1 - \varepsilon^{-2})|H|^2) \rightarrow 8/(\varepsilon^2 - 1)$. El comportamiento asintótico es casi idéntico al correspondiente a deflexiones pequeñas (115),

$$g_{ff}(v, \omega) \simeq \left(\sqrt{3}/\pi\right) \ln(2mv^3/\gamma_e \omega Ze^2) \quad \text{para } \omega \ll mv^3/Ze^2/mv^3, \quad (121)$$

con $\gamma_e = e^C \simeq 1.781073$, y $C \simeq 0.57721566\dots$ la constante de Euler.

4.4.4. Bremsstrahlung térmico - emisividad

- ▶ Las expresiones anteriores describen electrones mono-energéticos de velocidad v .
- ▶ Poblaciones de electrones se describen con distribuciones de velocidades, $f(\vec{v})$.
- ▶ Para electrones en equilibrio termodinámico, $f(\vec{v}) d^3v \propto \exp\{-mv^2/2kT\} v^2 dv$, y se tiene

$$4\pi j_\nu = \frac{d\mathcal{E}(T)}{dt dV d\nu} = \int \frac{d\mathcal{E}(v)}{dtdVdv} f(v) dv = \frac{32\pi e^6}{3mc^3} n_e n_i Z^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}, \quad (122)$$

donde \bar{g}_{ff} es el promedio del factor de Gaunt, j_ν la emisividad (isotrópica).

- ▶ Integrando sobre frecuencias se obtiene la potencia radiada por volumen,

$$\frac{d\mathcal{E}(T)}{dtdV} = \frac{32\pi e^6}{3hmc^3} \sqrt{\frac{2\pi kT}{3m}} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B = 1.426 \times 10^{-27} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} T^{1/2} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B, \quad (123)$$

siendo \bar{g}_B el factor de Gaunt promediado sobre frecuencias. Rybicki-Lightman da una discusión sobre el factor de Gaunt, generalmente de orden uno.

4.4.5. Absorción libre-libre

- ▶ El bremsstrahlung (123) es un proceso eficiente de enfriamiento en regiones ionizados, creciente con temperatura ($T^{1/2}$), densidad ($n_e n_i$) y metalicidad (Z^2).
- ▶ Siguiendo la ley de Kirchhoff, a todo proceso de emisión le corresponde uno de absorción, con coeficiente $\alpha_\nu = j_\nu / B_\nu(T)$, siendo j_ν el coeficiente de emisión y $B_\nu(T)$ la función de Planck. Para bremsstrahlung térmico tenemos,

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{4e^6}{3mhc} n_e n_i Z^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}} \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}, \\ &= 3.7 \times 10^8 \text{ cm}^{-1} n_e n_i Z^2 T^{-1/2} \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}. \end{aligned} \quad (124)$$

- ▶ Útil en modelos de estructura estelar es el coeficiente de absorción medio de Rosseland, dado por el promedio de α^{-1} con $\partial B / \partial T$ como función de peso,

$$\alpha_R = 1.7 \times 10^{-25} \text{ cm}^{-1} T^{-7/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_R, \quad (125)$$

con \bar{g}_R el promedio correspondiente de la función de Gaunt.

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

Son comunes las situaciones que involucran electrones relativistas. Dos consideraciones importantes son:

- ▶ un tratamiento relativista no cuántico supone deflexiones pequeñas,

$$\frac{v}{c} > Z\alpha \quad \Rightarrow \quad b_{min}^{(1)} = \frac{\hbar}{mv} > b_{min}^{(2)} = \frac{Ze^2}{mv^2},$$

siendo $Z\alpha \lesssim 0.001 \rightarrow 0.02$ para núcleos más ligeros que el hierro.

- ▶ El patrón dipolar clásico se altera por el movimiento relativista (beaming). En el caso relativista cuántico, el espectro puede estar dominado por unos cuantos fotones de alta energía propagados en la dirección original del electrón.

Un tratamiento conveniente es considerar el marco de referencia del electrón, aprovechando en el regreso al marco del observador que la potencia radiada es invariante (ecuación 71), al ser $P = d\mathcal{E}/dt$ cociente de dos componentes temporales, que se transforman de misma forma.

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- ▶ En su propio marco de referencia, el electrón percibe el campo del núcleo en movimiento, dado por los potenciales (54), el cual le proporciona una aceleración

$$\vec{a}'(t') = -\frac{e\vec{E}'}{m} = \frac{Ze^2}{m} \frac{(\hat{x}\gamma vt' + \hat{y}\gamma b)}{[\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2]^{3/2}}.$$

- ▶ El desarrollo es análogo al no relativista, obteniéndose,

$$\frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'}(v, b) \approx \frac{8Z^2 e^6}{3\pi m^2 c^3} \frac{1}{b^2 v^2} \quad \text{para} \quad \omega' \ll \frac{\gamma v}{b}, \quad (126)$$

con $d\mathcal{E}'/d\omega' \rightarrow 0$ para $\omega' \gg \gamma v/b$. Coincide con (112), con un factor γ en el corte.

- ▶ Se integra sobre parámetros de impacto para un sólo electrón, considerando un flujo de núcleos aumentado por γ en la dirección de movimiento, de forma que,

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt' d\omega'}(v) = \gamma n_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'} \right) 2\pi b db = \frac{16 n_i Z^2 e^6}{3m^2 c^3} \frac{\gamma}{v} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right). \quad (127)$$

describe el espectro de energía radiado por el electrón en su marco propio. ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- ▶ Bajo la restricción del tratamiento no cuántico, $b_{min} = \hbar/mv \rightarrow \hbar/mc$, sin factor γ , al ser b transversal al movimiento.
- ▶ En átomos neutros, $b_{max} \simeq 1.4a_0Z^{-1/3}$ por el apantallamiento del núcleo por las cargas electrónicas, con $a_0 = \hbar/me^2$ el radio de Bohr.
- ▶ Dado $a_0/(\hbar/mc) = e^2/\hbar c = \alpha$, se obtiene en (127), para $v \rightarrow c$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt d\omega} = \frac{16 n_i Z^2 e^6}{3m^2 c^4} \ln(192 Z^{-1/3}), \quad (128)$$

con el γ eliminado al regresar al marco del observador.

- ▶ La pérdida de energía se obtiene integrando sobre frecuencias, $\omega = 0 \rightarrow \mathcal{E}/\hbar$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{16 Z^2 e^6 \mathcal{E}}{3\hbar m^2 c^4} \ln(192 Z^{-1/3}) n_i.$$

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- ▶ El resultado es una pérdida exponencial de energía del electrón,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dX} = -\frac{\mathcal{E}}{X_0}, \quad (129)$$

al atravesar un medio con escala característica de densidad de columna,

$$X_0 = \frac{716 \text{ g cm}^{-2} A}{Z(Z + 1.3) \{ \ln(183 Z^{-1/3}) + 1/8 \}}, \quad (130)$$

donde A es la masa atómica del medio. Ec (130) incorpora el cálculo original de Bethe y Heitler.

- ▶ Un electrón relativista en el aire emite fotones de alta energía al atravesar una densidad de columna $\sim X_0 = 36.5 \text{ g cm}^{-2}$, mucho menor que el grosor de la atmósfera (1032 g cm^{-2}).

4.5. Radiación sincrotrón

- 4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme.
- 4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón.
- 4.5.3. Radiación sincrotrón por una población de electrones.
- 4.5.4. Función fuente y auto-absorción.

4.5. Radiación sincrotrón

- ▶ La radiación sincrotrón proviene principalmente de electrones de alta energía en campos magnéticos;
- ▶ Su polarización es indicativa de campos magnéticos;
- ▶ Se da en el medio interestelar, remanentes de supernova y galaxias activas;
- ▶ Tratándose de electrones relativistas se requiere ir más allá de la aproximación dipolar.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - movimiento

- ▶ El comportamiento de un electrón ($q = -e$) en un campo magnético se describe mediante la ecuación de movimiento bajo la fuerza de Lorentz (49),

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = -e \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (131)$$

- ▶ En un campo magnético ($\vec{E} = 0$), la energía se conserva y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_B \times \vec{v}, \quad (132)$$

con $\vec{\omega}_B \equiv e\vec{B}/\gamma mc$, la frecuencia de sincrotrón ($\omega_B = eBc/\mathcal{E}$).

- ▶ La frecuencia de sincrotrón se expresa también como $\omega_B = \omega_\ell/\gamma$, siendo $\omega_\ell = eB/mc$ la frecuencia de Larmor, independiente de la energía de la partícula.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - movimiento

- ▶ Tomando $\vec{B} = B\hat{z}$ obtenemos,

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v \sin \alpha \cos(\omega_B t + \phi_0) \\ v \sin \alpha \sin(\omega_B t + \phi_0) \\ v \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_\ell \sin(\omega_B t + \phi_0) \\ -r_\ell \cos(\omega_B t + \phi_0) \\ v \cos \alpha t \end{pmatrix} + \vec{r}_0, \quad (133)$$

donde α es el ángulo¹⁰ entre \vec{v} y \vec{B} . $\{v, \phi_0, \vec{r}_0\}$ son las condiciones iniciales .

- ▶ El movimiento se escala con el radio de Larmor,

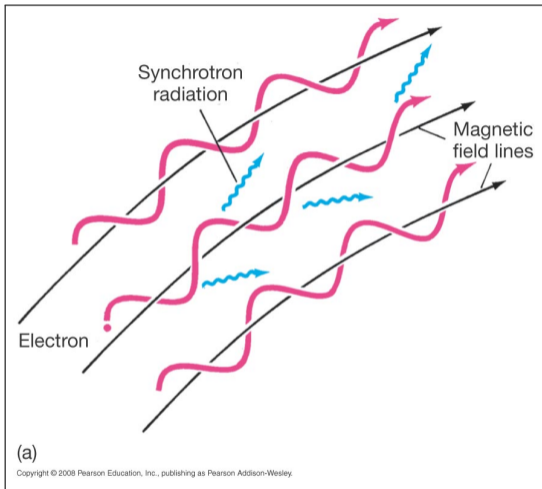
$$r_\ell \equiv v \sin \alpha / \omega_B = p_\perp c / eB, \quad (134)$$

con la rigidez magnética del electrón definida como $p_\perp c / e$.

- ▶ El movimiento es una superposición de rectilíneo uniforme a lo largo de la línea de campo magnético, y circular uniforme en el plano perpendicular a \vec{B} .

¹⁰ “pitch angle” en inglés.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - potencia radiada



- ▶ La potencia radiada por el electrón está dada por la ec. (71), con $a_{\parallel} = 0$,

$$P(t) = \frac{2e^2}{3c^3} a_{\mu} a^{\mu} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a_{\perp}^2,$$

con $a_{\perp} = |\vec{\omega}_B \times \vec{v}| = eB \sin \alpha v / \gamma mc$, de donde, escribiendo $B_{\perp} = B \sin \alpha$, obtenemos

$$P(t) = \frac{2e^4 B_{\perp}^2}{3m^2 c^3} \gamma^2 \beta^2. \quad (137)$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - potencia radiada

- ▶ Para una población isotrópica de electrones en relación al campo magnético podemos promediar sobre ángulo sólido,

$$\langle \sin^2 \alpha^2 \rangle = 2/3,$$

con lo que la potencia promedio queda como,

$$P(t) = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \langle B_{\perp}^2 \rangle \gamma^2 \beta^2 = \frac{2}{3} r_e^2 c \langle B_{\perp}^2 \rangle (\gamma^2 - 1) = \frac{4}{3} \sigma_T u_B c (\gamma^2 - 1), \quad (138)$$

con $r_e = e^2/mc^2$ el radio clásico del electrón¹², $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2$ la sección eficaz de Thompson, $u_B = B^2/8\pi$ la densidad de energía del campo magnético.

- ▶ La expresión (138) es análoga a la pérdida de energía de un electrón en un campo de radiación con densidad de energía u_{rad} (184, efecto Compton).

¹² $r_e \simeq 2.8178 \times 10^{-13}$ cm, $\sigma_T \simeq 6,652 \times 10^{-25}$ cm².

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - tiempo de vida

- ▶ El tratamiento cinemático desprecia pérdidas de energía al suponer γmc^2 constante. Se justifica en escalas de tiempo cortas.
- ▶ La emisión sincrotrón es un mecanismo eficiente de pérdida de energía.
- ▶ De (137), la escala de tiempo de pérdida de energía por radiación sincrotrón es

$$\tau \equiv \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^{-1} \rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{mc}{r_e^2 B_{\perp}^2} \right) \frac{1}{\gamma}, \quad \text{para } \gamma \gg 1. \quad (139)$$

- ▶ Por ejemplo, electrones de 1 TeV en el campo magnético Galáctico ($3 \mu\text{G}$), el tiempo de pérdida de energía es $\tau \simeq 0.9 \times 10^6$ años, mucho menor que el tiempo de difusión en la Galaxia (dependiente de r_{ℓ}).
- ▶ Núcleos atómicos de alta energía tienen una masa mucho mayor; el tiempo $\tau \propto m^2$ es suficientemente grande como para permitir su difusión por la Galaxia.

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

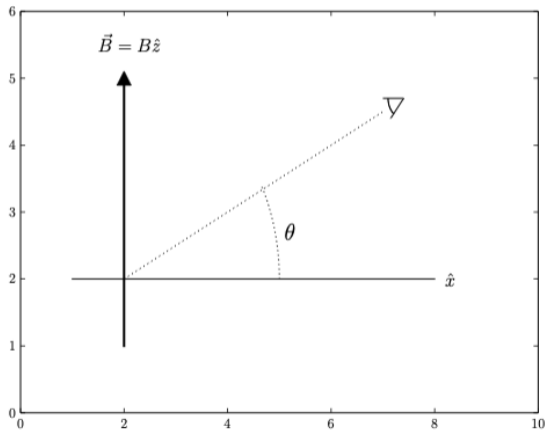


Figura 16: Para describir el proceso suponemos un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ y un observador distante con línea de visión $\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$. Suponemos el movimiento restringido al plano xy .

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

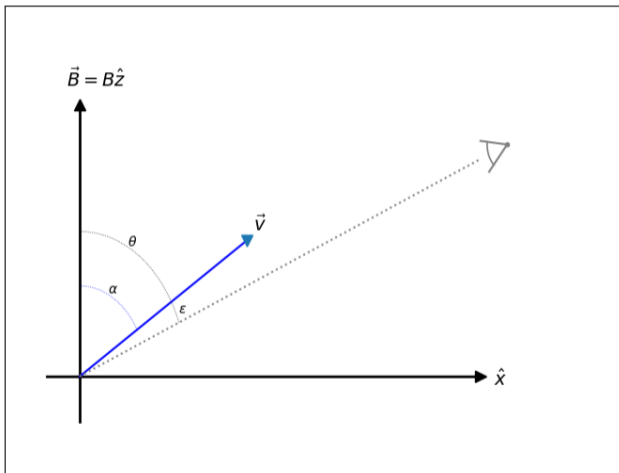


Figura 17: La orientación de la figura (16) no es óptima. La que aquí se muestra permite generalizar para $\alpha \neq \pi/2$, al medir el ángulo θ relativo al eje z , como se hace con \vec{v} , y definir ϵ , la diferencia entre θ y α . Es decir, la línea de visión es $\hat{r} = \hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$, $\theta = \alpha + \epsilon$. Esta situación no se desarrolla en este texto...

$$\vec{v} = v \sin \alpha (\hat{x} \cos \omega_B t_e + \hat{y} \sin \omega_B t_e) + \hat{z} v \cos \alpha,$$

$$\vec{a} = \omega_B \hat{z} \times \vec{v} = \omega_B v \sin \alpha (-\hat{x} \sin \omega_B t_e + \hat{y} \cos \omega_B t_e).$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - forma temporal

- ▶ La distribución temporal de la potencia radiada por el electrón está dada por (67). Se tiene para (133), considerando el movimiento y el observador ambos en el plano xy ($\theta = 0$),

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta^2}{4\pi c} \frac{(\beta - \cos \omega_B t_e)^2}{(1 - \beta \cos \omega_B t_e)^6}. \quad (140)$$

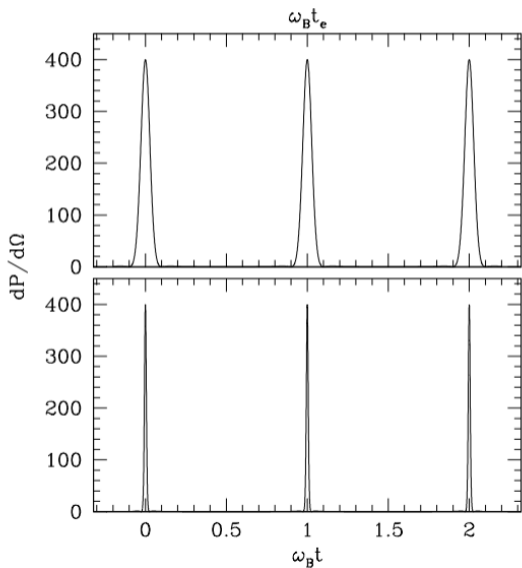
- ▶ El movimiento es armónico tanto en el tiempo retardado t_e , y para el observador t , con alto grado de amplificación alrededor de $\cos \omega_B t_e \rightarrow 1$.
- ▶ Al expandir $\cos \omega_B t_e \simeq 1 - (\omega_B t_e)^2/2 + \dots$, $\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2 + \dots$, se tiene

$$t_e \simeq t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e/c \Rightarrow t_e \simeq t + \beta t_e \Rightarrow t_e \approx 2\gamma^2 t,$$

dejando de lado el término constante r/c . Se obtiene,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} \approx \frac{e^2 \omega_B^2}{4\pi c} 16\gamma^8 \frac{(1 - \gamma^2 \omega_B^2 t_e^2)^2}{(1 + \gamma^2 \omega_B^2 t_e^2)^6} \approx \frac{4e^2 \omega_B^2}{\pi c} \gamma^8 \frac{(1 - \gamma^6 \omega_B^2 t^2)^2}{(1 + \gamma^6 \omega_B^2 t^2)^6}. \quad (141)$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - forma temporal



La emisión se da en pulsos de ancho $\Delta t \approx 2\pi/\gamma^3\omega_B$, repetidos con periodo $T = 2\pi/\omega_B$. El espectro va desde ω_B hasta $\gamma^3\omega_B$, en frecuencias discretas $\omega_n = n\omega_B$, con $n = 1 \rightarrow \gamma^3$.

Figura 18: Pulso de la emisión sincrotrón visto en función del tiempo retardado, t_e , y por el observador, t . En este ejemplo se tomó $\beta = 0.8 \Rightarrow \gamma \simeq 1.67$. El pulso en t_e tiene duración $\Delta t_e \propto 1/\gamma$, mientras que en t tiene duración $\Delta t_e \propto 1/\gamma^3$. Para valores grandes de γ , los pulsos aparecen *extremadamente* angostos.

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

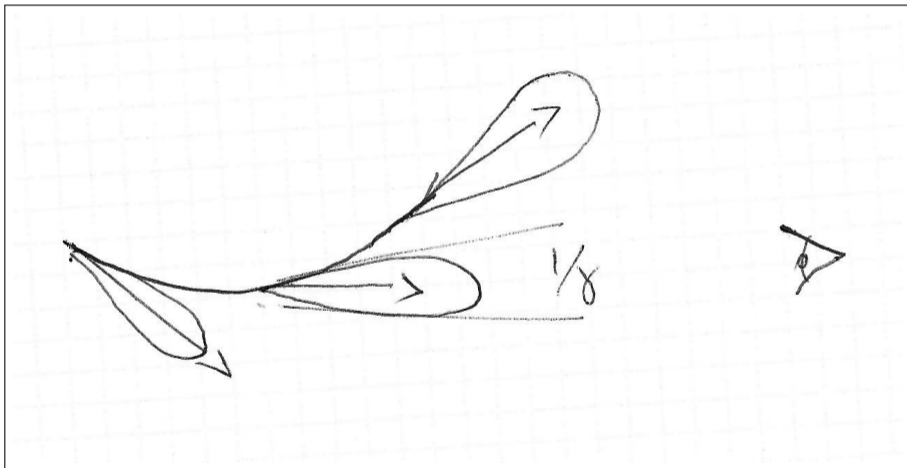


Figura 19: Ilustración del proceso sincrotrón. La emisión se confina a un haz de ancho $1/\gamma$ barriendo la línea de visión con frecuencia ω_B en tiempo retardado, y $\omega_c \sim \gamma^2 \omega_B$ para el observador.

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- ▶ La estimación del espectro requiere la expresión (74),

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2.$$

La línea de visión es $\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$, con $\theta = 0$ para el plano xy (figura 16).

- ▶ El vector $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) = (\hat{e}_1 \sin \omega_B t - \hat{e}_2 \sin \theta \cos \omega_B t) \beta$ define dos componentes de polarización, A_1 , A_2 , en direcciones perpendiculares (por definición) a la línea de visión \hat{r} ,

$$\hat{e}_1 = \hat{y}, \quad \hat{e}_2 = \hat{r} \times \hat{e}_1 = -\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta.$$

- ▶ La expresión (74) se puede escribir como,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \beta^2}{4\pi^2 c} \left(|A_1(\theta, \omega)|^2 + |A_2(\theta, \omega)|^2 \right). \quad (142)$$

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- ▶ En el límite $\{\theta, \omega_{BT}\} \ll 1 \ll \gamma$, se considera

$$\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2, \quad \beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2, \quad \sin x/x \simeq 1 - x^2/3!,$$

de forma que el término en la exponencial de (74) queda como,

$$i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c) = t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_{BT})/\omega_{BT}) \approx i(1/2\gamma^2 + \theta^2/2 + \omega_B^2 t^2/6),$$

- ▶ De donde,

$$A_1(\theta, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega_{BT} \cdot \exp \{i\omega t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_{BT})/\omega_{BT})\} dt$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{BT} \cdot \exp \left\{ \frac{i\omega t}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3} \right) \right\} dt,$$

$$A_2(\theta, \omega) = \sin \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega_{BT} \cdot \exp \{i\omega t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_{BT})/\omega_{BT})\} dt$$

$$\approx \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{i\omega t}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3} \right) \right\} dt.$$

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- ▶ Cambiando variables $q = \gamma\omega_B t / (1 + \gamma^2\theta^2)^{1/2}$, $x = (\omega/3\gamma^3\omega_B)(1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2}$,

$$A_1(\theta, \omega) \approx \frac{1 + \gamma^2\theta^2}{\gamma^2\omega_B} \int_{-\infty}^{+\infty} q \exp \left\{ i \frac{3}{2} x (q + q^3/3) \right\} dq \approx \frac{1 + \gamma^2\theta^2}{\gamma^2\omega_B} \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(x),$$

$$A_2(\theta, \omega) \approx \frac{\theta (1 + \gamma^2\theta^2)^{1/2}}{\gamma\omega_B} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \frac{3x}{2} \left(q + \frac{q^3}{3} \right) \right\} dq \approx \frac{\theta (1 + \gamma^2\theta^2)^{1/2}}{\gamma\omega_B} \frac{K_{1/3}(x)}{\sqrt{3}},$$

con K_r la función modificada de Bessel de orden r .

- ▶ Definiendo la frecuencia de corte,

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B, \quad (143)$$

la distribución espectral y angular de la emisión queda como,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{3 e^2}{16\pi^2 c} \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2\theta^2)^2 \left[K_{2/3}^2(x) + \frac{\gamma^2\theta^2}{1 + \gamma^2\theta^2} K_{1/3}^2(x) \right], \quad (144)$$

con $x = (\omega/2\omega_c)(1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2}$.

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- ▶ Integrando sobre frecuencias se obtiene la distribución angular de la emisión,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{7}{16} \frac{e^2 c}{\omega_B} \frac{\gamma^5}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{5/2}} \left[1 + \frac{5}{7} \left(\frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right) \right]. \quad (145)$$

La emisión consiste en un pulso de ancho $\Delta\theta \approx 1/\gamma$ amplificado por γ^5 (fig. 20).

- ▶ Al integrar sobre ángulo sólido se obtiene el espectro emitido en función de ω/ω_c ,

$$P(\omega) = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \alpha}{2\pi mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{con} \quad F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy. \quad (146)$$

- ▶ El espectro se separa en componentes perpendicular y paralela, $P = P_\perp + P_\parallel$, donde

$$\begin{Bmatrix} P_\perp(\omega) \\ P_\parallel(\omega) \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2} \begin{Bmatrix} F(\omega/\omega_c) + G(\omega/\omega_c) \\ F(\omega/\omega_c) - G(\omega/\omega_c) \end{Bmatrix}. \quad (147)$$

$F(x)$, $G(x) \equiv x K_{2/3}(x)$ son las funciones de emisión sincrotrón (Westfold 1959).

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

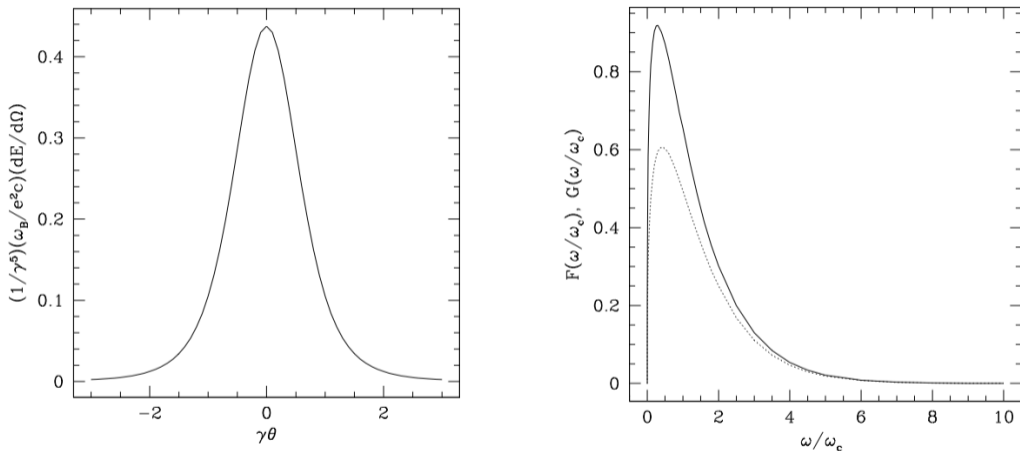


Figura 20: *Izquierda:* distribución angular de la emisión sincrotrón, limitada a un cono de apertura $\Delta\theta \sim 1/\gamma$. *Derecha:* la distribución espectral está dada por las funciones $F(\omega/\omega_c)$ -línea sólida- y $G(\omega/\omega_c)$ -línea punteada- con la frecuencia de corte $\omega_c = (3/2)\gamma^2(EB_{\perp}/mc)$.

4.5.2. Radiación sincrotrón - función sincrotrón

- ▶ La función

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy ,$$

mostrada en la figura (20), tiene comportamientos asintóticos,

$$F(x) \approx \frac{4\pi}{\sqrt{3} \Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad \text{para } x \ll 1 ,$$

$$F(x) \approx (\pi/2)^{1/2} e^{-x} x^{1/2} \quad \text{para } x \gg 1 .$$

- ▶ El grado de polarización de la radiación es

$$\Pi(\omega) = \frac{P_\perp(\omega) - P_\parallel(\omega)}{P_\perp(\omega) + P_\parallel(\omega)} = \frac{G(\omega/\omega_c)}{F(\omega/\omega_c)} . \quad (151)$$

- ▶ El caso general considera la inclinación con el campo magnético, resultando en

$$\omega_c = 3\gamma^3 \omega_B \sin \alpha/2 .$$

(Rybicki §6; Jackson §14)

4.5.3. Radiación sincrotrón de una población de electrones

- ▶ El espectro de un electrón, $P_e(\omega)$, se emplea para determinar la emisión total de una región. Las poblaciones de electrones son frecuentemente no térmicas y se describen con leyes de potencias en energías, o de valores de γ ,

$$N(E) dE \propto E^{-p} \quad \Rightarrow \quad N(\gamma) d\gamma = C \gamma^{-p} d\gamma, \quad (152)$$

con p típicamente en el rango (2,3).

- ▶ El espectro está dado por:

$$P(\omega) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P_e(\omega) \gamma^{-p} d\gamma \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(p-3)/2} dx, \quad (153)$$

donde $x = \omega/\gamma^2\omega_\ell$.

- ▶ Para un rango espectral amplio, $\gamma_1 \ll \gamma_2$,

$$P(\omega) \propto \omega^{-s} = \omega^{-(p-1)/2}. \quad (154)$$

4.5.3. Radiación sincrotrón de una población de electrones

- ▶ En el límite $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \infty$ la integración de (146) da,

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3} C}{2\pi(p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{e^2 \omega_\ell}{c}\right) \left(\frac{\omega}{3\omega_\ell}\right)^{-(p-1)/2}, \quad (155)$$

recordando $\omega_\ell = eB \sin \alpha / mc$.

- ▶ El índice espectral s de la radiación se relaciona con el de la distribución de electrones, p a través de $s = (p - 1)/2$.
- ▶ La polarización resultante es,

$$\Pi = \frac{p+1}{p+7/3}. \quad (156)$$

4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- ▶ A un proceso de emisión le corresponde el proceso recíproco de absorción.
- ▶ En equilibrio termodinámico, coeficientes de absorción y emisión se relacionan mediante la ley de Kirchhoff, $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$, con B_ν la función de Planck.
- ▶ Sincrotrón no ocurre normalmente en equilibrio. La relación entre emisión y absorción es mediante la función fuente, $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$.
- ▶ La definición estadística de la función fuente para transiciones entre estados $1 \rightarrow 2$ con poblaciones $n_1 = n(E_1)$, $n_2 = n(E_2)$, pesos estadísticos $g_1 = g(E_1)$, $g_2 = g(E_2)$,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{n_1 g_2/n_2 g_1 - 1}, \quad (157)$$

- ▶ Para electrones relativistas descritos por una ley de potencias $n(E) \propto E^{-p}$ se tiene $g(E) \propto E^2$, de donde,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{(E_1/E_2)^{-p+2} - 1} = \frac{2h\nu^3/c^2}{((E + h\nu)/E)^{p-2} - 1} \simeq \frac{2h\nu^3/c^2}{(p-2)(h\nu/E)},$$

donde $h\nu \ll E$, siendo E la energía de un electrón que emite a una frecuencia ν .

4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- ▶ Dado que la mayor parte de la emisión ocurre cerca de la frecuencia de corte,

$$2\pi\nu \simeq \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_\ell = \frac{3}{2}(E/mc^2)^2(eB/mc) \Rightarrow E \simeq mc^2(\nu/\nu_\ell)^{1/2}$$

con $\omega_\ell = 2\pi\nu_\ell = eB/mc$ la frecuencia de Larmor.

- ▶ La función fuente queda dada por,

$$S_\nu \simeq \frac{m\nu^{5/2}}{\nu_\ell^{1/2}(p/2 - 1)} \propto \nu^{5/2} B^{-1/2}, \quad (158)$$

- ▶ Dado $j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$, el coeficiente de absorción es $\alpha_\nu = j_\nu/S_\nu \propto \nu^{-(p+4)/2}$.
- ▶ La absorción predomina a frecuencias bajas. Se puede definir cierta ν_m tal que,
 - si $\nu \ll \nu_m$ el medio es ópticamente grueso: $I_\nu \rightarrow S_\nu \propto \nu^{5/2}$;
 - si $\nu \gg \nu_m$ el medio es ópticamente delgado: $I_\nu \rightarrow j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$;
 - en general: $I_\nu \approx S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$.

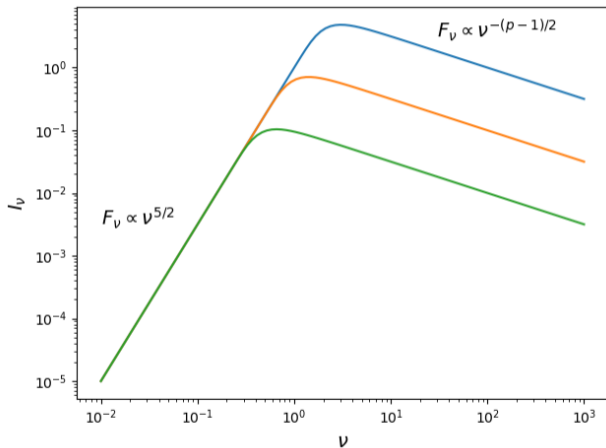
4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- ▶ El valor ν_m contiene información sobre la región emisora.
- ▶ El flujo de una esfera ópticamente gruesa de radio R está dado por

$$F_\nu = S_\nu \pi \theta^2,$$

con $\theta = R/r$ el tamaño angular.

- ▶ Mediciones interferométricas, muchas veces en radio, permiten medir θ , así como ν_m y F_m .
- ▶ Empleando (158) se puede deducir el campo magnético.



4.6. Efecto Compton

4.6.1. Dispersión de Thomson.

4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo

4.6.3. El efecto Compton - caso general, centro de momento.

4.6.4. Efecto Compton inverso.

4.6.5. Campos de radiación.

4.6.1. Dispersión de Thomson

- ▶ La dispersión de Thomson, o dispersión electrónica, se refiere a la dispersión de una onda plana electromagnética por un electrón libre.
- ▶ La dispersión de Thomson describe el caso no relativista ($v \ll c$), despreciando la acción del campo magnético, de orden $\sim v/c$.
- ▶ La onda afecta el movimiento del electrón de acuerdo a la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \approx -e\vec{E}.$$

- ▶ Para una onda monocromática, el movimiento del electrón, $\vec{r}_e(t)$, está descrito por

$$m\ddot{\vec{r}}_e \simeq -e\hat{\epsilon}E e^{i(kz-\omega t)}, \quad (159)$$

para $\vec{k} = k\hat{z}$, con $\hat{\epsilon} \perp \vec{k}$ el vector de polarización del campo eléctrico.

- ▶ Si se restringe el movimiento al plano xy , el término e^{ikz} representa una fase.

4.6.1. Dispersión de Thomson

- ▶ La potencia y el patrón de emisión se estiman bajo la aproximación dipolar

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})|^2}{4\pi c^3} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \left\{ 1 - (\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon})^2 \right\}, \quad (160)$$

con $\vec{d} = -e\vec{r}_e$ el momento dipolar del electrón $\Rightarrow \ddot{\vec{d}} = -\hat{\varepsilon} e\ddot{r}_e$.

- ▶ La potencia media por unidad de ángulo sólido queda como

$$\left\langle \frac{dP(t)}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c|E|^2}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2). \quad (161)$$

- ▶ Podemos cuantificar el efecto de dispersión mediante la comparación entre el flujo de energía de la onda plana incidente y la emisión dipolar resultante, a través de la *sección eficaz*, $d\sigma/d\Omega$, en su forma diferencial:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2). \quad (162)$$

4.6.1. Dispersión de Thomson

- ▶ Para un observador $\hat{r} = \hat{z} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta$, polarización lineal $\hat{\epsilon} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$, se obtiene un patrón dipolar, $\propto \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta$.
- ▶ Una onda con polarización circular, $\hat{\epsilon} = (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$, resulta en un patrón dipolar,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (163)$$

- ▶ Radiación no polarizada tiene un patrón dipolar, al integrar el caso lineal sobre ϕ .
- ▶ La integración sobre ángulo sólido resulta en la sección eficaz de Thomson,

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (164)$$

con $r_e = e^2/mc^2 = 2.8178 \times 10^{-13}$ cm, el radio clásico del electrón.

- ▶ La luz dispersada tiene la misma frecuencia que la incidente.
- La descripción del efecto Compton introduce un cambio en frecuencia.

4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo; dispersión electrónica

- ▶ El efecto Compton describe la dispersión de un electrón y un fotón, $\gamma e \rightarrow \gamma e$, como una colisión elástica \Rightarrow intercambio de energía y momento,

$$p_{e(i)} + p_{\gamma(i)} = p_{e(f)} + p_{\gamma(f)}. \quad (165)$$

- ▶ La dispersión electrónica (“electron scattering”) corresponde al caso de energía inicial del electrón despreciable.
- ▶ Para un electrón inicialmente en reposo,

$$\begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/c \\ \hat{k}_0 \hbar\omega_0/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{\beta}c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hbar\omega_1/c \\ \hat{k}_1 \hbar\omega_1/c \end{pmatrix},$$

se obtiene la fórmula de Compton, relacionando energías inicial y final del fotón,

$$\hbar\omega_1 = \frac{\hbar\omega_0}{1 + (\hbar\omega_0/mc^2) (1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)}. \quad (166)$$

4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo: dispersión electrónica

- ▶ Expresado en términos de la longitud de onda,

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos \theta). \quad (167)$$

El ángulo de dispersión está dado por $\cos \theta = \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1$, siendo $\lambda_c = h/mc$ la longitud de onda de Compton¹³.

- ▶ $\omega_1 \leq \omega_0 \Rightarrow$ el fotón cede energía al electrón, inicialmente en reposo.
- ▶ La dispersión electrónica es particularmente importante en interiores estelares y plasmas calientes densos en general.

¹³ $\lambda_c = 0.02426 \text{ \AA}$.

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz diferencial

- ▶ El resultado de la interacción (166) depende del ángulo θ , dado de manera probabilística por la sección eficaz de Klein-Nishina,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\omega_0, \theta) = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \left[\frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_0} - \sin^2 \theta \right], \quad (168)$$

con ω_1/ω_0 dado por (166).

- ▶ Para $\omega_1/\omega_0 \simeq 1$ se recobra la sección eficaz de Thomson, $\propto (1 + \cos^2 \theta)$.
- ▶ Al substituir (166) en (168), se puede expresar $d\sigma/d\Omega$ en función de $\cos \theta$ y $x = \hbar\omega_0/mc^2$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left[\frac{1}{1 + x(1 - \cos \theta)} + \frac{1}{(1 + x(1 - \cos \theta))^3} - \frac{\sin^2 \theta}{(1 + x(1 - \cos \theta))^2} \right]. \quad (169)$$

- ▶ El comportamiento de $d\sigma/d\Omega(\theta)$ se ilustra en la figura 21. Al aumentar ω_0 , se pasa de un comportamiento dipolar a dispersiones con θ pequeñas.

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz total

- ▶ La expresión (169) es integrable analíticamente, resultando en la sección eficaz total, en términos de $x = \hbar\omega_0/mc^2$,

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_T \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right]. \quad (170)$$

- ▶ En el régimen no relativista, $x \ll 1$,

$$\sigma \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26}{5}x^2 + \dots \right). \quad (171)$$

- ▶ En el régimen altamente relativista, $x \gg 1$, la sección eficaz decrece con la energía,

$$\sigma \approx \sigma_T \frac{3}{8x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right). \quad (172)$$

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz

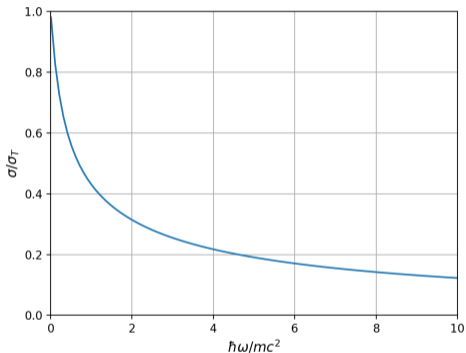
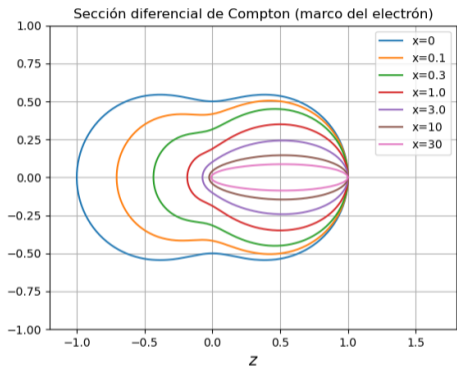


Figura 21: *Izquierda:* sección diferencial de Klein-Nishina para electrones en reposo (marco de referencia del electrón). El fotón original va de izquierda a derecha ($\hat{k}_0 = \hat{z} \Rightarrow \theta = 0$). Los valores de $x = \hbar\omega_0/mc^2$ están indicados. El máximo de $d\sigma/d\Omega$ corresponde a $2r_e^2$. *Derecha:* sección eficaz total.

4.6.3. Efecto Compton - caso general

- ▶ Los electrones son ubicuos en entornos astrofísicos y sus interacciones con fotones son frecuentes.
- ▶ La interacción electrón - fotón se describe con la conservación de energía y momento,

$$p_0^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/c + \gamma_0 mc \\ \hbar\omega_0 \hat{k}_0/c + \gamma_0 \vec{\beta}_0 mc \end{pmatrix} = p_1^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1/c + \gamma_1 mc \\ \hbar\omega_1 \hat{k}_1/c + \gamma_1 \vec{\beta}_1 mc \end{pmatrix}, \quad (173)$$

con los sub-índices 0, 1 antes y después de la interacción, respectivamente.

- ▶ La interacción tiene invariante:

$$p_\alpha p^\alpha = -m^2 c^2 - 2\gamma \hbar \omega m (1 - \hat{k} \cdot \vec{\beta}). \quad (174)$$

- ▶ Simplificamos la notación¹⁴ con $\omega \rightarrow \hbar\omega$, $\gamma \rightarrow \gamma mc^2$, para re-escribir (173),

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \gamma_0 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \gamma_1 \\ \omega_1 \hat{k}_1 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix}. \quad (175)$$

¹⁴equivalente a $\hbar/mc^2 = 1$.

4.6.3. Efecto Compton - caso general

- ▶ Al eliminar γ_1 , $\gamma_1 \vec{\beta}_1$, obtenemos la expresión general para la interacción Compton,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0 \omega_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0)}{\gamma_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_1) + \omega_0 (1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)}. \quad (176)$$

- ▶ Casos particulares:
 - un electrón en reposo: $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 1$, recuperamos la expresión (166).
 - $\hat{k}_1 = \hat{k}_0$ entonces $\omega_1 = \omega_0$, y no hay dispersión.
 - electrones no relativistas, como en la dispersión del fondo de microondas (CMB) por electrones en equilibrio térmico a muy alta temperatura en cúmulos de galaxias, en el denominado efecto Sunyaev-Zeldovich.

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

- ▶ La interacción Compton se describe frecuentemente en el centro de momento. La transformación al CM es,

$$\vec{\beta}_t = \vec{p}c/E = \frac{\omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0}{\omega_0 + \gamma_0} \Rightarrow \gamma_t = \frac{\omega_0 + \gamma_0}{\sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)}}. \quad (177)$$

- ▶ Por construcción, al transformar obtenemos,

$$p^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \omega'_0 + \gamma'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_1 + \gamma'_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (178)$$

con $\sqrt{-p_{\alpha'} p^{\alpha'}} = \omega'_0 + \gamma'_0 = \sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)} = \omega'_1 + \gamma'_1$.

- ▶ Momento total nulo y conservación de energía implican,

$$\gamma' \vec{\beta}' + \omega' \hat{k}' = 0 \Rightarrow \gamma' = \sqrt{1 + \omega'^2} \Rightarrow \omega'_1 = \omega'_0, \gamma'_1 = \gamma'_0. \quad (179)$$

- ▶ La interacción no modifica las energías del fotón y electrón en el centro de momento, siempre relacionadas mediante (179).

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

- ▶ La interacción en el CM corresponde a una rotación del vector de propagación,

$$\hat{k}'_0 \rightarrow \hat{k}'_1,$$

descrita por la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina, ahora referida al CM ($d\Omega \rightarrow d\Omega'$).

- ▶ $\omega \ll 1 \Rightarrow$ dipolar; $\omega \gg 1 \Rightarrow d\sigma/d\Omega$ aumenta hacia $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \hat{k}'_1 = -\hat{k}'_0$.
- ▶ La sección eficaz total es invariante y dada por (170), notando que,

$$-p_{\alpha'} p^{\alpha'} = 1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0) = 2x + 1,$$

donde $x = \gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)$.

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

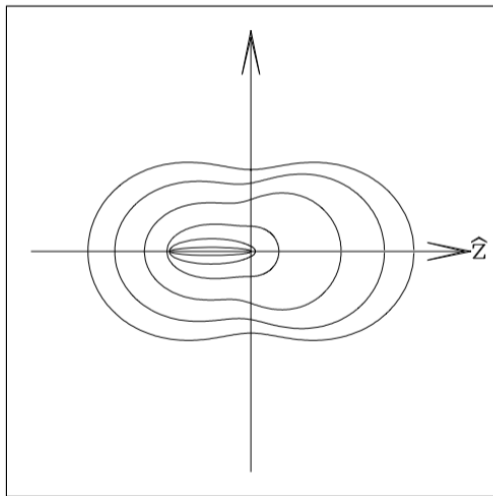


Figura 22: Sección diferencial de Klein-Nishina en el centro de momento. Los contornos, de externo a interno, son para $\omega = 0.0, 0.1, 0.3, 1.0, 3.0, 10.0$. El contorno más interno muestra la tendencia al “rebote” $\cos\theta = -1$ en altas energías, así como la disminución de σ . El contorno más externo corresponde a la dispersión de Thomson.

4.6.4. Efecto Compton inverso

- ▶ El *efecto Compton inverso* describe la transferencia de energía de electrones altamente relativistas a fotones de menor energía, $\gamma_0 \gg \text{máx}(1, \omega_0)$.
- ▶ Para $\gamma_0 \gg \omega_0$, el fotón dispersado se propaga en dirección muy cercana a la original del electrón. Al aproximar $\hat{k}_1 \simeq \hat{\beta}_0$ en (176), se obtiene,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0 \omega_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0)}{\gamma_0 (1 - \beta_0) + \omega_0 (1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{\beta}_0)} \simeq \frac{2\gamma_0^2 \omega_0 (1 - \beta_0 \cos \theta_0)}{1 + 2\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0)}. \quad (182)$$

Se distinguen dos casos:

1. $\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0) \ll 1 \Rightarrow \omega_1 \simeq 2\gamma_0^2 \omega_0 (1 - \beta_0 \cos \theta_0)$; el fotón adquiere una energía del orden $2\gamma^2 \omega_0$, acotada a $\omega_1 \lesssim 4\gamma^2 \omega_0$.
2. $\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0) \gg 1 \Rightarrow \omega_1 \simeq \gamma_0$: el fotón adquiere prácticamente toda la energía del electrón. En este régimen la sección eficaz disminuye y se da la *supresión de Klein-Nishina*.

4.6.4. Efecto Compton inverso

- ▶ La expresión (182) describe el espectro de fotones obtenido de la colisión entre electrones y fotones mono-energéticos, al considerar $\cos \theta_0 \in \{-1, +1\}$.
- ▶ El efecto Compton inverso es el proceso electromagnético que produce los fotones de más alta energía ($\gtrsim 100 \text{ TeV}$).
- ▶ La producción de rayos gamma de energía aún mayor puede ocurrir en colisiones entre hadrones.

4.6.5. Efecto Compton - campos de radiación

- ▶ La transferencia de energía a fotones de un campo de radiación resulta en un proceso de pérdida de energía para electrones relativistas.
- ▶ En cada interacción el electrón pierde la misma energía que ganó el fotón*,

$$\Delta(\gamma mc^2) \simeq -h\nu \{ \gamma^2(1 - \beta \cos \theta) - 1 \}, \quad (183)$$

conforme con (182) para $\gamma\omega \ll 1$, con la notación $\gamma \rightarrow \gamma mc^2$, $\omega \rightarrow h\nu$.

- ▶ El electrón ve un flujo de fotones $n_\nu c (1 - \beta \cos \theta)$, resultando en,

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= \int_{-1}^{+1} h\nu \{ \gamma^2(1 - \beta \cos \theta) - 1 \} \sigma_T n_\nu c (1 - \beta \cos \theta) d\nu \frac{d \cos \theta}{2}, \\ &= \frac{4}{3} \sigma_T u_{rad} c (\gamma^2 - 1), \end{aligned} \quad (184)$$

con $u_{rad} = \langle h\nu \rangle$ la densidad de energía del campo de radiación. Esta expresión es análoga a la pérdida de energía por radiación sincrotrón (138).

- ▶ Poblaciones de electrones relativistas pierden energía tanto por sincrotrón como por Compton, de acuerdo a la densidad de energía de cada campo.

4.6.5. Efecto Compton - campos de radiación

- ▶ La interacción con un campo de radiación puede ser con electrones relativistas o térmicos.
- ▶ La combinación de emisión sincrotrón con Compton inverso da lugar a los modelos SSC (Self Synchrotron Compton).

4.7. Procesos fotón - electrón a altas energías

- 4.7.1. Interacciones, canales, diagramas.
- 4.7.2. El canal de Compton.
- 4.7.3. Producción de pares.
- 4.7.4. Aniquilación electrón-positrón; positronio.
- 4.7.5. Interacciones de un vértice.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - interacciones

- ▶ La descripción de interacciones entre pares de partículas, como el efecto Compton, se basa en la conservación de energía y momento, que para,

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4, \quad (185)$$

podemos escribir como

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0, \quad (186)$$

donde q_j representa \pm el cuadrivector de energía-momento de la j -ésima partícula.

- ▶ (186) puede describir (185) o, intercambiando signos,

$$(I) : 1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (II) : 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad (III) : 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}, \quad (187)$$

donde \bar{j} representa la anti-partícula de j .

- ▶ En una descripción más general, las interacciones (187), y sus inversas, representan los canales de un mismo proceso genérico.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - interacciones

- ▶ Así, los tres canales de interacción entre dos electrones y dos fotones son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & \gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^- \implies \text{efecto Compton,} \\ \text{(II)} & \gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^- \implies \text{producción de pares,} \\ \text{(III)} & e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma \implies \text{aniquilación de pares.} \end{array} \right. \quad (188)$$

- ▶ La interacción entre electrones tiene los canales,

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-, \quad e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-, \quad e^+ e^+ \rightarrow e^+ e^+.$$

- ▶ La interacción entre electrones y muones,

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-, \quad e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-, \quad \mu^+ \mu^- \rightarrow e^+ e^-.$$

- ▶ La descripción física de estos procesos emplea *diagramas de Feynman*, construidos conectando secuencialmente la interacción de base, de acuerdo a algunas reglas.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - diagrama base

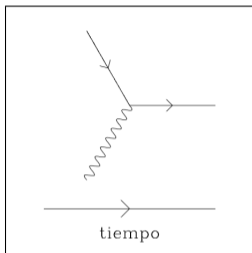


Figura 23: Proceso electrodinámico básico: la absorción de un fotón (línea ondulada) por un electrón (flecha). Al rotar el diagrama se describe la creación de un par e^+e^- por un fotón, con la convención de que una flecha en reversa representa una anti-partícula; o la aniquilación de un par e^+e^- en un fotón. Los diagramas base no conservan simultáneamente energía y momento.

- ▶ La interacción mostrada en el diagrama básico representa la emisión o absorción de un fotón (línea ondulada) por un electrón (flecha de izquierda a derecha).
- ▶ El diagrama base no representa una interacción real, al no conservar energía y momento simultáneamente.
 - Para un electrón con velocidad $\vec{\beta}c$ se debería cumplir

$$-p_\alpha p^\alpha = (\gamma + \omega)^2 - (\gamma\vec{\beta} + \omega\hat{k})^2 = \gamma + 2\gamma\omega(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}) = 1,$$

lo cual solo es posible si $\gamma = 1, \omega = 0 \Rightarrow$ no hay emisión.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - diagramas de Feynman

- ▶ El diagrama (23) es la base de la representación de las interacciones al combinarse en distintas configuraciones.
- ▶ Aún cuando los vértices no cumplan la conservación de energía y momento, las combinaciones de diagramas sí lo hacen.
- ▶ La figura (24) muestra los diagramas correspondientes a las interacciones entre electrons y fotones. Las partículas involucradas en la interacción se encuentran en los extremos; las partículas entre vértices son “virtuales”.
- ▶ Los diagramas de Feynman se emplean en el cálculo de secciones eficaces, relacionando las correspondientes a los distintos canales de una interacción genérica. Sus valores son típicamente del mismo orden ($\sim r_e^2$) y su cálculo se hace de manera análoga de acuerdo al formalismo de la electrodinámica cuántica.

(*Griffiths; Berestetskii*)

4.7.2. El canal de Compton

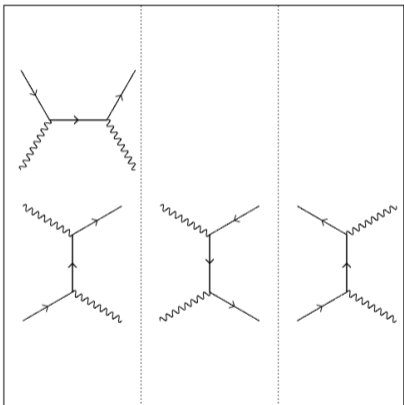


Figura 24: El canal de Compton incluye el efecto Compton ($\gamma e \rightarrow \gamma e$), la producción de pares electrón-positrón ($\gamma\gamma \rightarrow ee$) y su aniquilación ($ee \rightarrow \gamma\gamma$). A la izquierda dos diagramas representan la dispersión Compton; en el centro la producción de un par por dos fotones; y a la derecha la aniquilación una partícula con su anti-partícula para producir dos fotones.

4.7.3. Producción de pares - cinemática

- ▶ La producción de un par electrón-positrón por dos fotones, $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$, corresponde al diagrama central mostrado en la figura (24).
- ▶ Empleando unidades con $\hbar = mc^2 = 1$, la conservación energía-momento es

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \omega_1 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \omega_1 \hat{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \gamma_1 \\ \gamma_0 \vec{\beta}_0 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix},$$

con invariante

$$-p_\alpha p^\alpha = 2\omega_0\omega_1(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1) = 2 + 2\gamma_0\gamma_1(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_1). \quad (189)$$

- ▶ La relación (189) da lugar a la condición umbral $\omega_0\omega_1 > 1$, o,

$$\hbar\omega_0 \hbar\omega_1 > (mc^2)^2 \approx 0.25 \times 10^{12} \text{ eV}^2. \quad (190)$$

- ▶ El proceso se puede describir en el centro de momento, con el invariante dado por,

$$-p_\alpha p^\alpha = -4\omega^2 = -4\gamma^2, \quad (191)$$

donde los fotones y electrones de energía $\omega = \gamma$ se propagan direcciones opuestas.

4.7.3. Producción de pares - sección eficaz

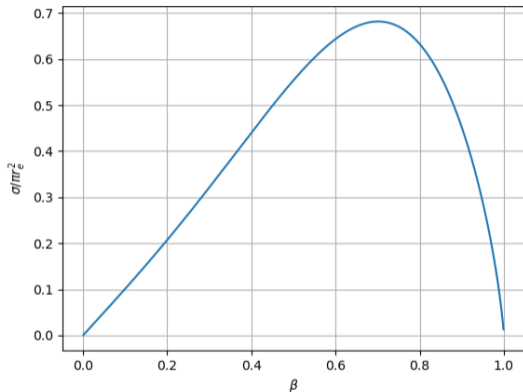
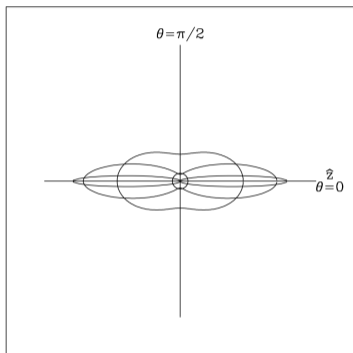


Figura 25: Sección eficaz diferencial (*izquierda*) y total (*derecha*) para la producción de pares $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$, referenciada al CM. La sección eficaz diferencial mantiene comportamiento bipolar, elongándose a medida que ω aumenta. La sección eficaz total se muestra aquí en función de β , la velocidad del par en el CM.

4.7.4. Aniquilación electrón-positrón - proceso, sección eficaz

- ▶ La aniquilación de pares, $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, tiene misma relación de invariancia que la producción de pares (189). Los dos procesos están estrechamente ligados de manera que,

$$\sigma_{ee \rightarrow \gamma\gamma} = \left(\frac{2}{\beta^2} \right) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow ee},$$

con un factor de dos debido a que electrón y positrón son distinguibles mientras que los fotones no lo son.

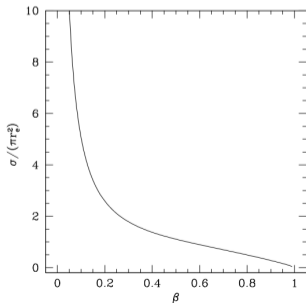


Figura 26: Sección eficaz para la aniquilación de pares $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, en términos de la velocidad β de los electrones en el centro de momento. La sección eficaz diverge para electrones lentos, $\beta \rightarrow 0$.

4.7.4. Aniquilación electrón-positrón - positronio

- ▶ La sección eficaz de aniquilación diverge a baja energía, $\sigma \rightarrow \pi r_e^2 / \beta$ (fig. 26), favoreciendo la aniquilación de pares relativamente lentos.
- ▶ Se ha observado una línea delgada de aniquilación, a $mc^2 \simeq 0.511 \text{ MeV}$, en el centro Galáctico - originalmente con *CGRO-OSSE* en los 1990s.
- ▶ La presencia de e^-e^+ lentos propicia la formación de un sistema ligado análogo al hidrógeno, denominado positronio.
- ▶ Dependiendo de la configuración, el positronio decae en dos o tres fotones, dando lugar a una línea ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$) o un continuo ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$).
- ▶ La detección del *continuo de positronio*, junto con la línea de aniquilación, evidencia la presencia de e^+e^- lentos en el centro Galáctico.

4.7.5. Interacciones de un vértice - en campos magnéticos

- ▶ La interacciones de un vértice,

$$e^- \rightarrow \gamma e^-, \quad \gamma \rightarrow e^- e^+, \quad e^+ e^- \rightarrow \gamma,$$

no conservan energía-momento, pero ocurren en presencia de campos que absorban energía o momento. Las secciones eficaces son de orden αr_e^2 .

- ▶ La emisión sincrotrón corresponde con la interacción $e^- \rightarrow \gamma e^-$ en un campo magnético. Se escribe también como $e^- B \rightarrow \gamma e^- B$.
- ▶ Otro canal de esta interacción es la producción de pares en un campo magnético, $\gamma B \rightarrow e^- e^+ B$, de umbral

$$E_1 (\alpha B^2 \lambda_c^3) \gtrsim (mc^2)^2 \quad \Rightarrow \quad x \equiv \left(\frac{E_1}{mc^2} \right) \left(\frac{B}{B_c} \right) \gtrsim 1.$$

donde $B_c \equiv m^2 c^3 / e \hbar \simeq 4 \times 10^{13}$ Gauss es el campo magnético crítico.

- ▶ Una interacción de tres vértices en $B \sim B_c$ es “photon splitting”, $\gamma B \rightarrow \gamma \gamma B$.

4.7.5. Interacciones de un vértice - campo electrostático

- ▶ Bremsstrahlung puede representarse como

$$e^- Z \rightarrow \gamma e^- Z,$$

con Z indicando el campo electrostático.

- ▶ La producción de pares e^\pm en la vecindad de un núcleo cargado, $\gamma Z \rightarrow e^- e^+ Z$, viene dada en términos del parámetro de impacto y la carga del núcleo,

$$\frac{Ze^2}{b} \sim mc^2 \Rightarrow \sigma \sim \alpha b^2 \sim \alpha Z^2 r_e^2.$$

- El cálculo de la sección eficaz de producción de pares da

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_e^2 \left\{ \ln \left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2} \right) - \frac{109}{42} \right\} \quad \text{para} \quad \hbar\omega/mc^2 \gg 1.$$

4.7.5. Interacciones de un vértice - cascadas electromagnéticas

- ▶ Un fotón de alta energía en un campo magnético, electrostático o de radiación puede producir un par, $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Estos a su vez pueden interactuar con el mismo campo, $e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$, y producir más fotones de alta energía.
- ▶ Si los procesos tienen condiciones adecuadas para continuar, ocurre una cascada electromagnética.
- ▶ Estas cascadas ocurren en la atmósfera y pueden ser detectadas directamente con arreglos de detectores de partículas o por la radiación Cherenkov emitida por los electrones de alta energía en el aire.
 - La radiación Cherenkov se produce si $v > c/n$, siendo n el índice de refracción del medio: es anisotrópica, restringida a un cono de apertura $\cos \psi \approx 1/\beta n \rightarrow 1/n$.
- ▶ Cascadas electromagnéticas también ocurren en escenarios astrofísicos como la vecindad de hoyos negros supermasivos o de estrellas de neutrones.