

## Capítulo 4

# Teoría Clásica de Procesos Radiativos

Alberto Carramiñana, 2 de abril de 2021.

### 4.1. Elementos de relatividad especial

#### 4.1.1. Sistemas inerciales de referencia

Un sistema de referencia inercial es aquel en el que es válida la ley de la inercia, o primera ley de Newton,

*en ausencia de fuerzas externas un cuerpo mantiene un estado de movimiento rectilíneo uniforme.*

Sea  $O$  un observador en un sistema de referencia inercial que mide la posición de una partícula puntual en función del tiempo  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$ , si se emplean coordenadas cartesianas. De acuerdo a la mecánica clásica, la transformación

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t, \quad (4.1)$$

lo relaciona con otro observador inercial  $O'$  en movimiento relativo con velocidad  $\vec{v}$ , que describe la posición de la misma partícula con coordenadas cartesianas  $\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x} + y'(t)\hat{y} + z'(t)\hat{z}$ , que suponemos proyectadas sobre los mismos ejes. La transformación inversa tiene la misma forma, y se obtiene despejando o invirtiendo el signo de la velocidad en (4.1),

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{v}t. \quad (4.2)$$

Si el vector  $\vec{r}$  describe la posición de una partícula vista por el observador  $O$ , la relación entre la velocidad de esta partícula,  $\vec{u}$ , medida por ambos

observadores es,

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}, \quad (4.3)$$

siendo  $dt' = dt$ . De forma general, las transformaciones entre sistemas inerciales clásicos, o *transformaciones de Galileo*, preservan tiempo y distancias,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}' = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'. \quad (4.4)$$

Se pueden describir como combinaciones de rotaciones entre ejes, traslaciones fijas y movimientos uniformes (4.1).

### 4.1.2. Postulados de la relatividad

La teoría especial de la relatividad se fundamenta en dos postulados:

1. las leyes de la física tienen la misma forma en todo marco de referencia inercial;
2. la velocidad de la luz es constante y su valor es independiente del marco de referencia elegido.

Al igual que en el caso clásico, es posible intercambiar marcos de referencia mediante combinaciones de movimientos rectilíneos uniformes, rotaciones entre ejes y traslaciones fijas. El primer postulado indica que las leyes de la física toman la misma forma en todo marco de referencia inercial. El primer postulado incluye entre las leyes de la física las ecuaciones de Maxwell que predice la propagación de ondas electromagnéticas con velocidad  $c$ . Alrededor de 1900 se creía que estas ecuaciones, y en particular la propagación de la luz con velocidad  $c$ , debían referirse a un medio denominado *el éter*, el cual definía así un marco de referencia privilegiado.

El segundo postulado establece la velocidad de la luz como una cantidad invariante, en conflicto la invariancia del tiempo clásico. El segundo postulado ha sido corroborado experimentalmente, al punto de que el metro se define hoy en día a partir de la definición del segundo y del valor de  $c$ , definido de forma *exacta*:  $c = 299\,792\,458$  m/s.

### 4.1.3. Transformaciones de Lorentz

La invariancia de la velocidad de la luz relaciona dos sistemas de referencia inerciales mediante,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0. \quad (4.5)$$

Suponiendo dos sistemas con la misma orientación de ejes de coordenadas, y restringiéndonos a un movimiento relativo a lo largo del eje  $\hat{x} = \hat{x}'$ , proponemos la transformación lineal

$$ct' = A ct + B x, \quad x' = D ct + E x.$$

Al combinar estas expresiones con (4.5) llegamos a la forma básica de las transformaciones de Lorentz,

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x = c\gamma(t - vx/c^2), \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x = \gamma(x - vt), \end{cases} \quad (4.6)$$

donde  $\vec{v} = \beta c \hat{x}$  es la velocidad de O' relativa a O. El *factor de Lorentz*

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

es igual a uno para  $\beta = 0$  y crece con  $|\beta|$ , con límite  $\gamma \rightarrow \infty$  para  $\beta^2 \rightarrow 1$ .

Las transformaciones de Lorentz se definen entre *eventos*, dados por *posición y tiempo*. Preservan la forma del *intervalo*  $s^2 = -c^2t^2 + r^2$  en todo sistema inercial. Forman parte de un grupo representable con matrices de  $4 \times 4$  que incluye translaciones a velocidad constante, rotaciones, desplazamientos del origen y transformaciones sin significado físico, como inversiones espaciales o temporales (con determinante negativo). La transformación correspondiente a un movimiento rectilíneo uniforme sobre el eje  $\hat{x}$  es,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

De misma manera, la transformación correspondiente a un movimiento rectilíneo uniforme a lo largo del eje  $\hat{y}$  es,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al combinar dos transformaciones paralelas, con  $v_1 = \beta_1 c$ ,  $v_2 = \beta_2 c$ , obtenemos una transformación con la suma relativista de velocidades, congruente con  $|\beta| < 1$ ,

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2), \quad \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (4.8)$$

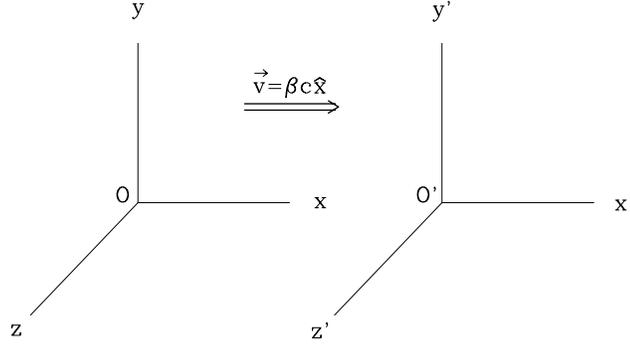


Figura 4.1: Marcos de referencia O y O' con sistemas de ejes paralelos y en movimiento relativo  $\vec{v} = \beta c \hat{x}$

Toda transformación de Lorentz tiene una inversa única que lleva de  $(ct', \vec{r}')$  a  $(ct, \vec{r})$ . Para ejes paralelos la transformación inversa equivale a reemplazar  $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$ . Empleando notación matricial y omitiendo  $(y, z)$ , la transformación inversa de un movimiento a lo largo del eje  $\hat{x}$  (expr. 4.7), es

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

La transformación correspondiente a una velocidad  $\vec{v} = \vec{\beta}c$  entre dos sistemas O y O' con *ejes paralelos* viene dada por,

$$ct' = \gamma ct - \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{r}, \quad \vec{r}' = -\gamma \vec{\beta} ct + \vec{r} + (\gamma - 1) (\hat{\beta} \cdot \vec{r}) \hat{\beta}. \quad (4.9)$$

La matriz de la transformación (4.9) es,

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\beta_y\beta_x/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_y\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\beta_z\beta_x/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_z\beta_y/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_z^2/\beta^2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La forma más general para estas transformaciones se obtiene combinando rotaciones y movimientos rectilíneos, notando con precaución que el grupo de Lorentz no es conmutativo.

#### 4.1.4. Consecuencias de la relatividad especial

**Simultaneidad:** de acuerdo al observador O, los eventos  $(t_1 = 0, x_1 = 0)$  &  $(t_2 = 0, x_2 = X \neq 0)$  ocurren al mismo tiempo y son, por tanto, simultáneos. De la ecuación (4.6) vemos que los mismos eventos no son simultáneos para el observador O', quien los ubica en  $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$  &  $(t'_2 = -\gamma\beta X/c, x'_2 = \gamma X)$ . El concepto de simultaneidad depende del marco de referencia del observador, y no es absoluto.

**Dilatación temporal:** dos eventos que ocurren en un mismo lugar en tiempos distintos, con son dos tics de un reloj, definen un intervalo de tiempo. Un observador O registra los eventos  $(t_1 = 0, x_1 = 0)$  &  $(t_2 = T, x_2 = 0)$ , que de acuerdo a O' están dados por  $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$  &  $(t'_2 = \gamma T, x'_2 = -\gamma\beta cT)$ . La dilatación temporal se manifiesta en la mayor separación en tiempo:  $t'_2 - t'_1 \geq t_2 - t_1$ . El lapso de tiempo entre dos eventos es mínimo en el marco de referencia en el que suceden en la misma posición. Se define el *tiempo propio* como aquel transcurrido en el marco de referencia donde la separación entre eventos es sólo temporal.

**Contracción espacial:** también *contracción de Lorentz*, no es evidente a primera vista en las transformaciones (4.10). La medición de una barra de longitud  $L$  en reposo que realiza O puede describirse con dos eventos que definen simultáneamente los extremos de la barra,  $(t_1 = 0, x_1 = 0)$  &  $(t_2 = 0, x_2 = L)$ . O' registra estos mismos eventos en  $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$  &  $(t'_2 = -\gamma\beta L/c, x'_2 = \gamma L)$ . Siendo  $x'_2 - x'_1 \geq x_2 - x_1$ , parecería que deberíamos hablar de una expansión, y no de una contracción.

La sutileza reside en la medición de la posición de ambos extremos de la barra, que debe ser de forma *simultánea* por O'. La medición simultánea de las dos puntas de la barra que hace O no es simultánea para O', que ve la barra en movimiento. Una solución es dejar  $t_2$  libre, siendo innecesaria la medición simultánea en O, para exigir  $t'_1 = t'_2$ . El permitir  $t_2 \neq t_1$  no representa problema ya que, justamente, la barra está en reposo en relación a O. Consideramos entonces la medición de la barra en O con dos eventos  $(t_1 = 0, x_1 = 0)$  &  $(t_2, x_2 = L)$ , los cuales corresponden para O' en la medición simultánea  $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$  &  $(t'_2 = 0, x'_2 = L')$ . La transformación de Lorentz relevante implica,

$$ct'_2 = \gamma ct_2 - \gamma\beta L = 0 \Rightarrow t_2 = \beta L/c, \quad L = \gamma L_0 - \gamma\beta ct_2 \Rightarrow L' = L/\gamma \leq L.$$

Al exigir la simultaneidad en O' se obtiene la contracción de la barra,  $L' \leq L$ .

### 4.1.5. Cuadrivectores y mecánica relativista

La relatividad generaliza la mecánica de Newton introduciendo *cuadrivectores*, una generalización de vectores espaciales que incorpora la componente temporal, permitiendo modificar las leyes de la física de manera consistente con los postulados de la relatividad. En particular, el requerimiento de que la velocidad de la luz sea independiente del marco de referencia se introduce en la construcción de los cuadrivectores. El cuadrivector básico es el de tiempo y posición, el cual ubica un evento en el espacio y el tiempo. Tiene por componentes cartesianas,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

abreviadas como  $x^\alpha$ , donde el índice  $\alpha$  toma el valor cero para la componente temporal, y  $j = \{1, 2, 3\}$  para las tres componentes espaciales. Expresado de forma explícita, está dado por,

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Se define el intervalo entre eventos como,

$$\Delta s^2 \equiv -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \quad (4.12)$$

Un intervalo que describe la propagación de la luz cumple  $\Delta s = 0$  en todo marco de referencia. Un intervalo que relaciona dos eventos causalmente conectados cumple  $\Delta s \leq 0$ . Podemos expresar la relación (4.12) de manera más compacta y en forma diferencial como,

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \longrightarrow \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

definiendo el *tensor métrico de Minkowski*, expresado en coordenadas cartesianas como<sup>1</sup>,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.13)$$

<sup>1</sup>A veces se define con signos invertidos,  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Por ejemplo en Jackson.

Se emplea la convención de que todo índice repetido como superíndice y subíndice en una fórmula indica una sumatoria sobre él, por ejemplo

$$\eta_{\alpha\beta} x^\alpha = \eta_{0\beta} x^0 + \eta_{1\beta} x^1 + \eta_{2\beta} x^2 + \eta_{3\beta} x^3 = x_\beta.$$

En términos generales un cuadrivector es una entidad física con una componente temporal y tres componentes espaciales que cumple con la invariancia bajo transformaciones de Lorentz, representadas con matrices de forma  $\Lambda^\alpha_\beta$ ,

$$a^{\alpha'} = \Lambda^\alpha_{\beta'} a^\beta = \Lambda^\alpha_0 a^0 + \Lambda^\alpha_1 a^1 + \Lambda^\alpha_2 a^2 + \Lambda^\alpha_3 a^3. \quad (4.14)$$

Los cuadrivectores con super-índice,  $a^\alpha$ , se denominan *contravariantes*. Empleando  $\eta_{\alpha\beta}$  se construyen los cuadrivectores *covariantes*,

$$a_\beta = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha = (-a^0, \vec{a}),$$

es decir  $a_0 = -a^0$ ;  $a_j = a^j$ , con  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Esta notación permite emplear la forma  $a_\alpha a^\alpha$  para la “norma” de un cuadrivector, y  $a_\alpha b^\alpha$  para la extensión del producto escalar a las 3+1 dimensiones. En general, la transformación de Lorentz (4.10) aplicada a un cuadrivector  $a^\alpha$  da,

$$a^{0'} = \gamma (a^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{a}), \quad \vec{a}' = -\gamma \vec{\beta} a^0 + \vec{a} + (\gamma - 1) (\hat{\beta} \cdot \vec{a}) \hat{\beta}. \quad (4.15)$$

La construcción de mas cuadrivectores emplea el *tiempo propio*,  $\tau$ , definido por un observador que sitúa eventos en una misma posición, es decir  $dx = dy = dz = 0 \Rightarrow ds^2 = -c^2 d\tau^2$ , de donde,

$$d\tau \equiv \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \frac{dt}{\gamma}. \quad (4.16)$$

El tiempo propio es un *escalar* invariante: una variable física unidimensional cuya expresión es la misma en cualquier marco de referencia inercial. Podemos construir cuadrivectores derivando con respecto a  $d\tau$ , como el cuadrivector de velocidad,

$$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

de norma  $u_\alpha u^\alpha = -c^2$ , invariante. Su derivada es el cuadrivector de aceleración,

$$a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \, d\gamma/dt \\ \gamma \, d(\gamma \vec{v})/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{v}/c \\ \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}/c^2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Su norma  $a_\alpha a^\alpha = \gamma^4 a^2 + \gamma^6 (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2$ , es un invariante igual al cuadrado de la aceleración en un marco en reposo instantáneo con la partícula acelerada.

Un cuadrivector directamente relacionado al de velocidad es el de energía-momento, definido para una partícula de masa  $m$  como,

$$p^\alpha \equiv mu^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Este cuadrivector generaliza el momento de una partícula a  $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ , y define su energía como  $E = \gamma mc^2$ . En reposo tenemos  $E_0 = mc^2$ , siendo la versión relativista de la energía cinética  $E_c = (\gamma - 1)mc^2 \rightarrow mv^2/2$ , con el límite clásico esperado para  $v/c \ll 1$ . La norma del cuadrivector de energía-momento, es

$$p_\alpha p^\alpha = -E^2/c^2 + p^2 = -m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (4.20)$$

La generalización de la mecánica de Newton requiere definir cuadrivectores de fuerza,  $\mathcal{F}$ , que permitan describir interacciones de forma similar a la segunda ley de Newton,

$$\mathcal{F}^\mu = ma^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (4.21)$$

La aceleración (4.18) puede separarse en componentes paralela y perpendicular a la velocidad,

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \quad \text{con} \quad \vec{a}_\parallel \equiv (\hat{\beta} \cdot \vec{a}) \hat{\beta}, \quad \vec{a}_\perp \equiv \hat{\beta} \times \vec{a}, \quad (4.22)$$

para escribir (4.21) de forma más explícita,

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c} \right) = \gamma^4 m \vec{a}_\parallel, \quad \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma^2 m \vec{a}_\perp + \gamma^4 m \vec{a}_\parallel. \quad (4.23)$$

La componente de la aceleración paralela a la velocidad cambia la energía de la partícula (“ $\vec{a}_\parallel$  hace trabajo”), siendo más difícil acelerar una partícula relativista linealmente que de forma perpendicular.

Más allá de la relatividad especial, el principio de equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria permite generalizar la definición del intervalo entre eventos,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.24)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico, generalización del tensor de Minkowski. En el formalismo de relatividad general  $g_{\alpha\beta}$  describe al campo gravitacional, el cual se calcula a partir de la distribución de masa y energía mediante la ecuación de Einstein. La minimización del intervalo  $ds$  define el movimiento de partículas en el campo. En ausencia de gravedad,  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ .

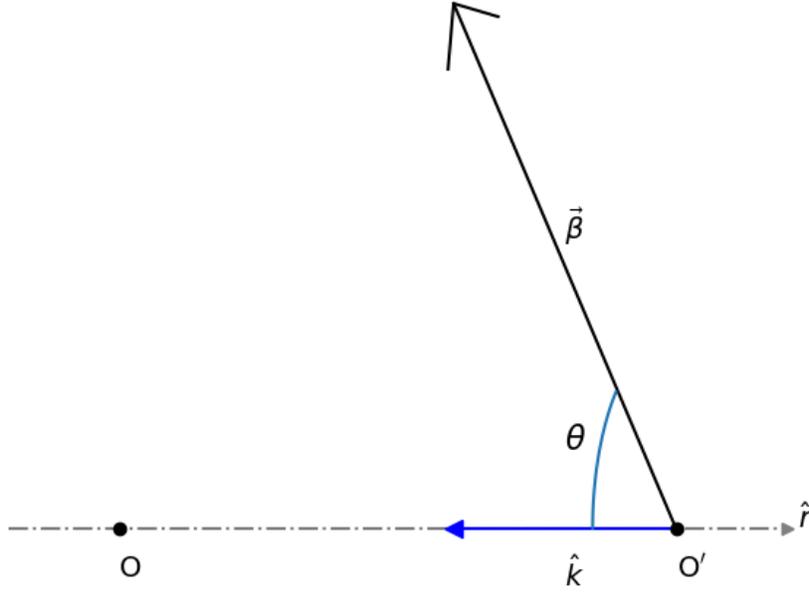


Figura 4.2: Fuente de luz con velocidad  $\vec{\beta}c$  con respecto a O, que recibe luz en la dirección de la línea de visión,  $\hat{k}$ .

#### 4.1.6. Fotones, efecto Doppler y distorsión de haces

La expresión de la derecha en la ec. (4.19) es independiente de  $m$  y permite la generalización a partículas sin masa, con  $E^2 = p^2c^2$ . Siguiendo este razonamiento, se le asocia al fotón el cuadrivector de energía-momento,

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hbar k^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega/c \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

con  $\vec{k} = (\omega/c)\hat{k}$  el vector de propagación. La relación de dispersión para la propagación de la luz en el vacío implica la norma nula,  $k_\alpha k^\alpha = 0$ , acorde con una masa igual cero y la propagación de la luz en intervalos nulos,  $ds = 0$ .

Consideramos una fuente luminosa con velocidad  $\vec{\beta}$  relativa al observador que emite radiación de frecuencia  $\omega_0$ . Sea  $\hat{k}$  la dirección propagación de la luz que recibimos de la fuente, la cual coincide con la línea de visión (fig. 4.2). La frecuencia de la radiación recibida es

$$\omega = \gamma\omega_0 (1 + \vec{\beta} \cdot \hat{k}) = \gamma\omega_0 (1 + \beta \cos \theta), \quad (4.26)$$

la cual fue emitida por la fuente en la dirección,

$$\hat{k}' = \frac{\hat{k} - \gamma\vec{\beta} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \hat{k})\hat{\beta}}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k})} \Rightarrow \hat{\beta} \cdot \hat{k}' = \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Algunos casos particulares son,

- para una fuente alejándose en movimiento radial,  $\cos \theta = -1$ , y

$$\omega = \gamma\omega_0(1 - \beta) = \omega_0\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad \cos \theta' = -1.$$

La frecuencia observada es menor y corresponde al *corrimiento al rojo*.

- para una fuente acercándose en movimiento radial,  $\cos \theta = +1$ , y

$$\omega = \gamma\omega_0(1 + \beta) = \omega_0\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \cos \theta' = +1.$$

La frecuencia observada es mayor y corresponde al *corrimiento al azul*.

- en el caso de una fuente moviéndose perpendicularmente tenemos  $\cos \theta = 0$ , y

$$\omega = \gamma\omega_0, \quad \cos \theta' = -\beta.$$

Existe un corrimiento al rojo transversal, y la luz recibida no fue emitida de manera perpendicular por la fuente.

En el caso general se tiene

$$\cos \theta = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad (4.27)$$

Una fuente que emite radiación isotrópica, es decir independiente de  $\theta'$ , se observa como anisotrópica de acuerdo a

$$d\Omega = 2\pi d\cos \theta = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + \beta \cos \theta')^2}.$$

Al aumentar  $\beta$  el haz se cierra y la radiación se corre al azul en la dirección de movimiento ( $\theta' = 0$ ), dando lugar a una amplificación de la intensidad observada, en el efecto conocido como “beaming”. (§4.2.3)

### 4.1.7. Campos electromagnéticos

Los campos electromagnéticos pueden ser descritos mediante los potenciales escalar,  $\phi$ , y vectorial,  $\vec{A}$ , que se combinan en el cuadvivector,

$$A^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Adicionalmente, se define el operador de derivación, de tipo contravariante,

$$\partial_\alpha \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (4.29)$$

el cual permite expresar ecuaciones físicas fundamentales de manera compacta. Si los potenciales electromagnéticos cumplen con la norma de Lorenz lo hacen en cualquier marco de referencia inercial, ya que ésta tiene expresión covariante,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (4.30)$$

Una implicación es que la norma de Coulomb,  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , no es invariante. Las fuentes de los campos electromagnéticos son las densidades de carga y corriente eléctrica, que se combinan en el cuadvivector,

$$j^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

La ecuación de continuidad se puede expresar de manera covariante como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (4.32)$$

La generalización de los campos electromagnéticos requiere extender el concepto de cuadvivectores al de tensores: un escalar es un tensor de rango cero, un cuadvivector es un tensor de rango uno, y tensores de rango dos pueden describirse mediante matrices de  $4 \times 4$ . Esta generalización puede continuar a tensores de rango arbitrario. Se construyen los campos electromagnéticos mediante un tensor antisimétrico ( $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ ) de rango dos,

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (4.33)$$

que se puede representar como,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Definido este tensor, las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse de forma invariante,

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.35)$$

La expresión de la izquierda corresponde a las ecuaciones de Maxwell con fuentes,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

La expresión de la derecha se anula cuando hay índices repetidos, y contiene las otras dos ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{123\} &\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = 0, \\ \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \{\{012\}, \{013\}, \{023\}\} &\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.35), reemplazadas en (4.33), resultan en la forma covariante para la ecuación de onda con fuentes:

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \iff \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

aprovechando la norma de Lorenz. En la §4.2 se estudia la solución de estas ecuaciones para una carga en movimiento arbitrario.

La transformación del campo electromagnético entre marcos de referencia se hace mediante una doble transformación de Lorentz,  $F^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\mu^\beta F'^{\gamma\mu}$ , resultando en las siguientes relaciones,

$$\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel, \quad \vec{B}_\parallel = \vec{B}'_\parallel, \quad \vec{E}_\perp = \gamma \left( \vec{E}'_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}'_\perp \right), \quad \vec{B}_\perp = \gamma \left( \vec{B}'_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}'_\perp \right). \quad (4.37)$$

Un campo puramente eléctrico ( $\vec{B}' = 0$ ) o puramente magnético ( $\vec{E}' = 0$ ) se transforma en un campo electromagnético ( $\vec{B} \neq 0, \vec{E} \neq 0$ ). El invariante escalar  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$  indica que existe un marco de referencia único donde sólo uno de los dos campos,  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$ , es nulo<sup>2</sup>.

La fuerza que ejerce un campo electromagnético sobre una carga, la *fuerza de Lorentz*, se expresa de manera covariante como el producto del tensor *mixto* de campo electromagnético,  $F^\alpha_\beta = \eta_{\mu\beta} F^{\alpha\mu}$ , y el cuadvivector de velocidad,

$$\mathcal{F}^\alpha = (q/c) F^\alpha_\beta u^\beta.$$

<sup>2</sup>Otro invariante es el vector de Poynting. §25 “The Classical Theory of Fields”, Landau & Lifshitz.

Con el álgebra adecuada se obtiene de (4.21),

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (4.38)$$

La primera ecuación denota el cambio de energía debido al trabajo del campo eléctrico, mientras que la segunda ecuación es la expresión clásica para la fuerza de Lorentz, con un factor  $\gamma$  adicional.

## 4.2. Campos de una carga en movimiento

### 4.2.1. Carga en reposo y en movimiento rectilíneo uniforme

La densidad de una carga puntual en reposo es  $\rho(\vec{r}, t) = -e \delta(\vec{r} - \vec{r}_e)$ , para un electrón ( $q = -e$ ) situado en la posición  $\vec{r}_e$ . Para una carga en reposo la densidad de corriente es nula,  $\vec{j} = 0$ . Independientemente de la norma, el potencial escalar se obtiene (4.36), que resulta en la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho,$$

con  $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})$ . Realizando el cambio de variable,  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e$ , tenemos  $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{R}) = -e \delta(R)/R^2$ , para la función delta en coordenadas esféricas  $(R, \theta, \varphi)$ . Reduciendo  $\Phi(\vec{r}, t)$  a  $\Phi(R)$ , e integrando la ecuación de Poisson sobre una esfera de radio  $a$  centrada en la carga,

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\Phi}{dR} \right) = 4\pi e \frac{\delta(R)}{R^2} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dR}(a) = \frac{4\pi e}{a^2}, \quad \text{para } a > 0.$$

Al integrar sobre  $a$  podemos obtener el potencial de Coulomb,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{-e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|}, \quad \vec{A} = 0, \quad (4.39)$$

y campos electromagnéticos,

$$\vec{E}(\vec{r}) = e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|^3}, \quad \vec{B} = 0. \quad (4.40)$$

Para un electrón en movimiento rectilíneo uniforme, consideramos la posición  $\vec{r}_e(t) = \hat{x} vt + \hat{y} b$ , y la transformación de los campos Coulombianos desde el marco de referencia del electrón con la carga en reposo pero desplazada del origen,  $\vec{r}'_e = \hat{y} b$ , es decir

$$\phi'(\vec{r}') = \frac{-e}{\sqrt{x'^2 + (y' - b)^2 + z'^2}}, \quad \vec{A}' = 0.$$

Los potenciales se transforman como  $\phi = \gamma\phi'$ ;  $\vec{A} = \gamma(v/c)\phi'\hat{x}$ , es decir,

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{-e\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + (y-b)^2 + z^2}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{-e\gamma(v/c)\hat{x}}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + (y-b)^2 + z^2}}.$$

Los campos electromagnéticos se pueden derivar directamente de estos potenciales. Alternativamente, se puede hacer un desarrollo similar al anterior, aprovechando las transformaciones de los campos (4.40),

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \gamma\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}'_{\perp}.$$

### 4.2.2. Potenciales de Liénard-Wiechert

El campo electromagnético producido por una carga en movimiento arbitrario se obtiene de las ecuaciones (4.32), dadas las formas funcionales de  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , que para un electrón con una trayectoria arbitraria  $\vec{r}_e(t)$  son,

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta[\vec{r} - \vec{r}_e(t)], \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = -e \vec{v}_e(t) \delta[\vec{r} - \vec{r}_e(t)]. \quad (4.41)$$

Los potenciales se pueden obtener con el método de la función de Green<sup>3</sup>. La deducción alternativa a continuación aprovecha cantidades invariantes.

Podemos transformar el potencial de Coulomb del marco de referencia en reposo instantáneo con el electrón ( $O'$ ) al marco del observador  $O$ , considerando al electrón en un instante distinto al tiempo de la medición,  $t'_e \neq t'$  (fig. 4.3). En  $O'$  los potenciales están dados por

$$\phi'(\vec{r}', t') = \frac{-e}{|\vec{r}'(t') - \vec{r}'_e(t'_e)|}, \quad \vec{A}'(\vec{r}', t') = 0, \quad (4.42)$$

con  $A'^{\alpha}A'_{\alpha} = -e^2/|\vec{r}'(t') - \vec{r}'_e(t'_e)|^2$  invariante para una elección conveniente de  $t'_e$ . Para encontrarla construimos el cuadvectores  $R^{\alpha}$  que describe el contacto causal entre el electrón y el evento de medición del campo,

$$R^{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} ct - ct_e \\ \vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e) \end{pmatrix},$$

que cumple  $R_{\alpha}R^{\alpha} = 0$  en cualquier marco de referencia. Por ende,

$$-c^2(t - t_e)^2 + |\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e)|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_e = t - |\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e)|/c. \quad (4.43)$$

<sup>3</sup>Ver Jackson §12.11. El capítulo 14 de Jackson muestra la deducción mediante la función de Green.

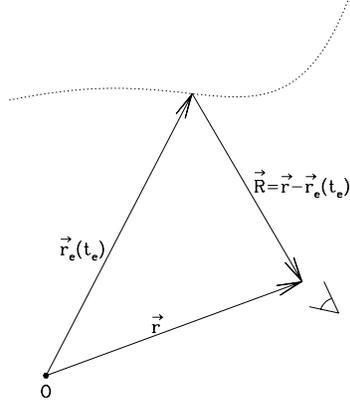


Figura 4.3: Electrón en movimiento arbitrario visto desde el marco de referencia  $O$ . El vector  $\vec{r}$  denota la posición del observador en el instante  $t$ , y  $\vec{r}_e(t_e)$  la del electrón en el instante  $t_e$ . El vector  $\vec{R}$  conecta ambos eventos.

Esta expresión define al *tiempo retardado*,  $t_e$ , como solución de la ecuación implícita (4.43). La invariancia de  $R^\alpha$  en el marco de referencia del electrón, implica

$$-c^2(t' - t'_e)^2 + |\vec{r}'(t') - \vec{r}'_e(t'_e)|^2 = 0,$$

de donde  $\phi'(\vec{r}', t') = -e/c(t' - t'_e)$ . Haciendo el producto escalar de  $R^\alpha$  con el cuadrivector de velocidad de la partícula medido en  $t = t_e$ , obtenemos el escalar:

$$u^\alpha R_\alpha = -\gamma c^2(t - t_e) + \gamma \vec{v}_e(t_e) \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e)) = -c^2(t' - t'_e),$$

donde  $\vec{v}_e = d\vec{r}_e/dt$ . El invariante  $u^\alpha R_\alpha$  nos permite expresar  $\phi'$  en términos de  $t$  y  $t_e$ ,

$$\phi' = \frac{-e}{\gamma |\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e)| - \gamma (\vec{v}_e(t_e)/c) \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e))} = \frac{-e}{\gamma R (1 - \vec{v}_e(t_e) \cdot \hat{R}/c)},$$

con  $\vec{R} = \vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_e)$ , la parte espacial de  $R^\alpha$ . Mediante una transformación al marco del observador, obtenemos la forma covariante para los potenciales electromagnéticos,

$$A^\beta = \frac{(-e)}{R (1 - \vec{v}_e \cdot \hat{R}/c)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_e/c \end{pmatrix} = \frac{(-e) u^\beta}{u^\alpha R_\alpha}. \quad (4.44)$$

Estos potenciales son invariantes y toman la forma (4.42) en el marco de referencia del electrón. La expresión (4.44) corresponde a los potenciales de

Liénard-Wiechert, que se escriben también como,

$$\phi(\vec{r}, t) = \left[ \frac{-e}{R(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}_e/c)} \right]_{t_e}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \left[ \frac{-e \vec{v}_e/c}{R(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}_e/c)} \right]_{t_e}. \quad (4.45)$$

Desde el punto de vista matemático los potenciales de Liénard-Wiechert tienen también una solución *avanzada*, que corresponde con el electrón en  $t_a = t + |\vec{r}(t) - \vec{r}_e(t_a)|/c$ . Esta solución se descarta al no cumplir con el argumento de causalidad física, ya que la información de la carga llega al observador *después* de la medición del campo. Un argumento análogo dice que los potenciales retardados corresponden con ondas que divergen de la carga mientras que los potenciales avanzados corresponden con ondas que convergen hacia ella, contrariamente a lo observado en la naturaleza.

Derivando las expresiones para los potenciales de Liénard-Weichert, obtenemos los campos electromagnéticos correspondientes:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{-e}{R^2} \left[ \frac{(\hat{R} - \vec{\beta})}{\gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} + \frac{-e}{Rc} \left[ \frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde la posición, velocidad  $\vec{v}_e = \vec{\beta}c$ , y aceleración  $\vec{a} = \dot{\vec{\beta}}c$  del electrón se evalúan en  $t_e$ . El campo electromagnético tiene dos componentes: un “campo de velocidad” ( $\propto 1/R^2$ ), generalización del campo de Coulomb, y el campo de aceleración ( $\propto 1/R$ ),

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{-e}{Rc} \left[ \frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}, \quad \vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = \hat{R} \times \vec{E}_{rad}(\vec{r}, t). \quad (4.47)$$

La propagación de energía electromagnética está descrita por el vector de Poynting, dado para un campo de radiación por,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 \hat{R}, \quad (4.48)$$

aprovechando (4.47) y la perpendicularidad<sup>4</sup> entre  $\hat{R}$  y  $\vec{E}_{rad}$ . De aquí se obtiene la potencia total radiada por el electrón y su distribución angular,

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 R^2 d\Omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_{rad}|^2. \quad (4.49)$$

<sup>4</sup>a través de  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ .

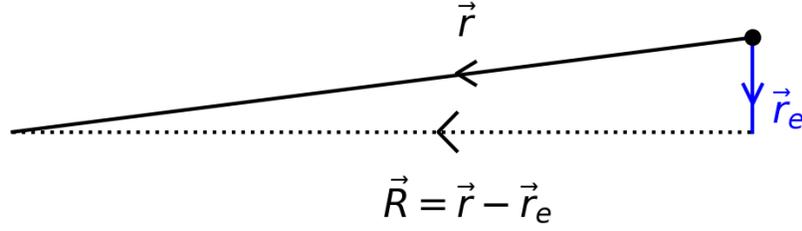


Figura 4.4: Origen de referencias O elegido tal que  $r_e \ll r$ . El origen está en el punto negro, cercano a la carga situada en  $\vec{r}_e$ , mientras que el punto de medición está del lado izquierdo en  $\vec{r}$ .

La proporcionalidad  $\vec{E}_{rad} \propto 1/R$  indica que la radiación se diluye de acuerdo a la dependencia del ángulo sólido con la distancia.

En problemas astrofísicos la distancia  $r$  entre el observador y la carga es mucho mayor que la región en la cual ésta se mueve, la cual define la escala  $r_e \ll r$ . Podemos entonces aproximar

$$R \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}_e, \quad t_e \approx t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c. \quad (4.50)$$

A orden cero  $R \approx r$ , siendo la posición del punto de observación relativa al observador,  $\vec{r}$ , constante (fig. 4.4).

### 4.2.3. Fórmula de Larmor y distribución angular de la radiación

Los patrones de emisión están determinados por la distribución angular de la potencia (4.49). La expresión general que resulta de (4.47) para la potencia recibida por un observador en un tiempo  $t$  es,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2, \quad (4.51)$$

Analizamos a continuación la forma de  $dP/d\Omega$  para tres casos importantes.

#### (a) Partícula no relativista: fórmula de Larmor

Para una carga en movimiento no-relativista ( $\beta \ll 1$ ), los campos de radiación están dados por:

$$\vec{E}_{rad} \simeq -\frac{e}{c^2} \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})}{r}, \quad \vec{B}_{rad} \simeq \frac{e}{c^2} \frac{\hat{r} \times \vec{a}}{r}, \quad (4.52)$$

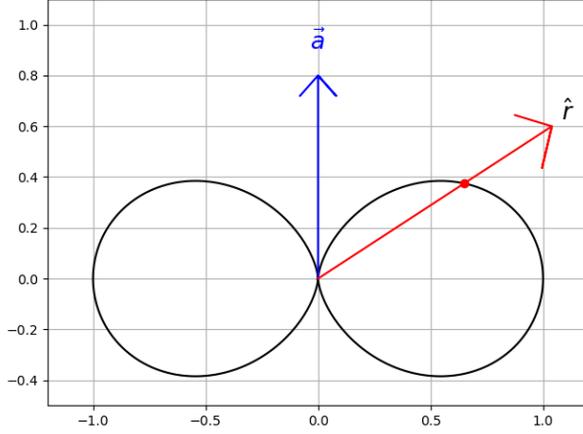


Figura 4.5: Patrón de emisión dipolar. La emisión tiene simetría sobre el ángulo acimutal.

con la aproximación adicional  $t_e \approx t - r/c$ . La potencia radiada por ángulo sólido queda descrita por la forma,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_{rad}|^2 \simeq \frac{e^2}{4\pi c^3} |\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})|^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (4.53)$$

con  $\theta$  el ángulo entre la línea de visión y la aceleración,  $\cos \theta = \hat{r} \cdot \hat{a}$ . El patrón de emisión se anula en la dirección de  $\vec{a}$ , independiente del vector de velocidad (fig. 4.5). Esto es particular al caso no relativista, siendo que en general el vector  $\vec{\beta}$  juega un papel importante.

Al integrar sobre  $d\Omega$  obtenemos la potencia total radiada en función del tiempo,

$$P(t) \simeq \frac{2e^2 a^2}{3c^3}. \quad (4.54)$$

Esta es la forma no relativista de la *fórmula de Larmor*. Tres puntos a notar:

- (i) una carga acelerada radía proporcionalmente al cuadrado de su carga y aceleración,  $P \propto a^2 e^2$ ; esto se aplica en el caso general.
- (ii) la emisión tiene un patrón *dipolar* ( $\propto \sin^2 \theta$ ); en el caso relativista el patrón es más complejo, pero retiene parcialmente el aspecto dipolar.
- (iii) si el vector  $\vec{a}$  tiene dirección fija, entonces  $\vec{E} \propto \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$  también tiene dirección fija, y la radiación tiene polarización lineal.

La expresión no relativista de la fórmula de Larmor (4.54) se generaliza directamente a una expresión covariante,

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu a^\mu, \quad (4.55)$$

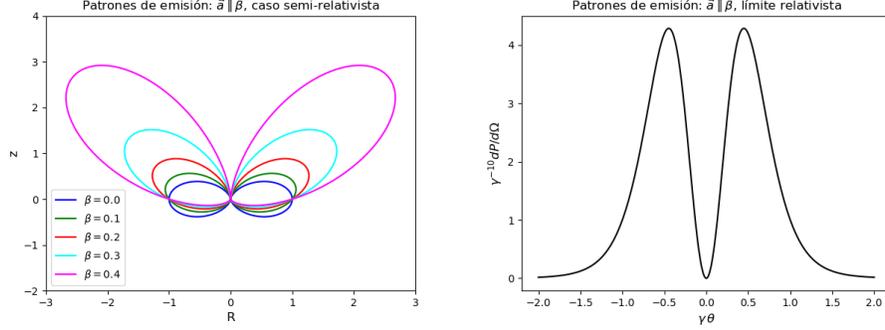


Figura 4.6: Patrones de emisión para una carga con  $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ , en el caso moderadamente relativista (*izquierda*), y ultrarelativista (*derecha*).

que tiene la forma,

$$P(t) = \frac{2e^2}{3c} \gamma^2 \left[ \left( \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} \right)^2 - \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right] = \frac{2e^2}{3c^3} (\gamma^4 a_{\perp}^2 + \gamma^6 a_{\parallel}^2), \quad (4.56)$$

siendo  $a_{\parallel}$  y  $a_{\perp}$  las componentes de  $\vec{a}$  paralela y perpendicular al vector de velocidad (ec. 4.23).

### (b) Partículas relativistas

El patrón de emisión para un movimiento arbitrario está descrito por la aproximación de la expresión (4.51),

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{\hat{r} \times ((\hat{r} - \vec{\beta}) \times \vec{a})}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2.$$

Analizamos este patrón para dos casos particulares:

- $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ : desaparece la velocidad en la parte superior de la expresión (4.51),

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}.$$

Este patrón se ilustra en la figura 4.6 para los casos semi-relativista y el límite  $\gamma \rightarrow \infty$ . Los dos extremos de esta función son:  $\sin \theta_{min} = 0$ , donde la emisión se anula; y el máximo de emisión,

$$\cos \theta_{max} = \frac{(\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1)}{4\beta} \Rightarrow \theta_{max}(\gamma \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{\gamma\sqrt{5}}.$$

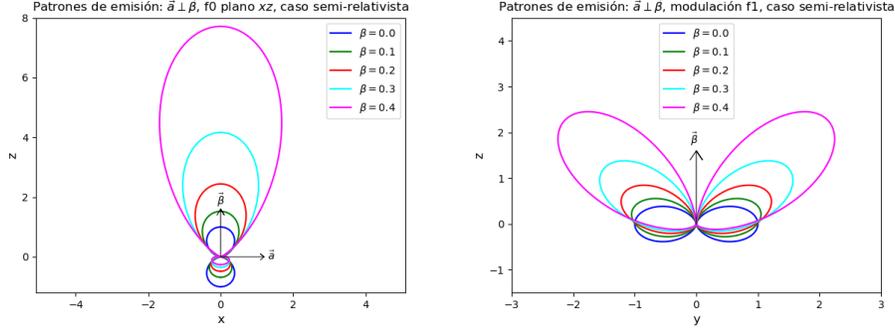


Figura 4.7: Patrones de emisión para una carga con  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ , en el caso moderadamente relativista, considerando la componente para  $\sin \phi = 0$  (izquierda) y la componente adicional,  $f_1$  (derecha). La emisión total es  $f_0 + f_1 \sin^2 \phi$ .

- para  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$  debemos usar la expresión general (4.51), que se visualiza definiendo la orientación de los vectores. Por ejemplo,

$$\vec{r} = \hat{z} \cos \theta + (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \sin \theta, \quad \vec{\beta} = \beta \hat{z}, \quad \vec{a} = a \hat{x}.$$

Con estas definiciones, la expresión (4.51) queda

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{(\cos \theta - \beta)^2 + \sin^2 \phi \sin^2 \theta / \gamma^2}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \right].$$

Los patrones son de forma manifiestamente dipolar en  $\phi$  para una apertura  $\theta$  dada: la expresión  $dP/d\Omega \propto f_0(\theta, \beta) + f_1(\theta, \beta) \sin^2 \phi$  oscila entre un mínimo local  $dP/d\Omega \propto f_0$ , para  $\sin^2 \phi = 0$ , y un máximo local  $dP/d\Omega \propto f_0 + f_1$ , para  $\sin^2 \phi = 1$ . Las formas de estas dos funciones se muestra en la figura 4.7. El máximo de emisión se da en  $\theta = 0$ , con el límite  $\gamma \rightarrow \infty$  dado por,

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \left( \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \right) 16\gamma^8 \left[ \frac{\{1 - (\gamma\theta)^2\} + 4(\gamma\theta)^2 \sin^2 \phi}{\{1 + (\gamma\theta)^2\}^6} \right].$$

La figura 4.8 muestra las dos componentes, y la suma al considerar  $\langle \sin^2 \phi \rangle = 1/2$ .

El análisis riguroso de la relación entre los patrones de emisión y su integración sobre  $d\Omega$  debe considerar que las coordenadas de la carga son medidas en  $t_e \simeq t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c$ , que no es función lineal de  $t$ . Esto resulta en la disminución por un factor de  $\gamma^2$ , conforme a la expresión (4.55).

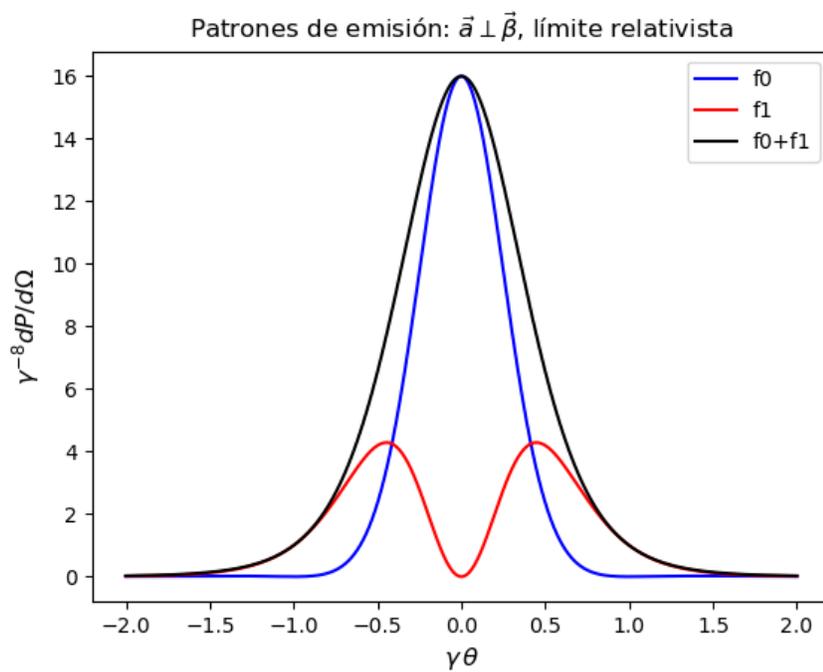


Figura 4.8: Patrones de emisión para una carga con  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ , en el caso límite relativista, con la componente  $f_0$  en azul y  $f_1$  en rojo. La curva en negro representa la integración sobre  $d\phi$ , usando  $\langle \sin^2 \phi \rangle = 1/2$ .

#### 4.2.4. Distribución espectral de la radiación

Mientras que la potencia mide la energía radiada por unidad de tiempo,  $P(t) = d\mathcal{E}/dt$ , el espectro está dado por la distribución en frecuencias de la energía radiada, es decir  $P(\omega) = d\mathcal{E}/d\omega$ . La distribución angular de la energía radiada relaciona la derivada angular de ambas,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} d\omega, \quad (4.57)$$

considerando que frecuencias negativas no contribuyen. A través de (4.49) es posible encontrar la distribución de energía de

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} |RE(t)|^2 dt = \frac{c}{2\pi} \int_0^{+\infty} |R\vec{E}(\omega)|^2 d\omega,$$

donde aprovechamos la relación de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R\vec{E}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |R\vec{E}(\omega)|^2 d\omega,$$

con  $R\vec{E}(t)$  y  $R\vec{E}(\omega)$  relacionados mediante la transformada de Fourier,

$$R\vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(t) e^{i\omega t} dt, \quad R\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.58)$$

Para  $\vec{E}$  real  $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega)$ . De la expresión (4.47) para el campo de radiación se tiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\hat{R} \times \{(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e} e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

Para avanzar usamos la aproximación  $R \simeq r$ ,  $t \simeq t_e + r/c - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c$  para cambiar la variable de integración, notando  $dt = (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{r}) dt_e$ ,

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\hat{r} \times \{(\hat{r} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^2} \right] e^{i\omega(t_e - \hat{r} \cdot \vec{r}_e/c)} dt_e \right|^2,$$

sacando el término unitario  $e^{i\omega r/c}$  de la integral. Jackson (§14) afirma que el término en paréntesis es una diferencial exacta,

$$\left[ \frac{\hat{r} \times \{(\hat{r} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta}} \right],$$

que permite una integración por partes y reducir la expresión para la distribución espectral y angular a

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2, \quad (4.59)$$

cambiando la variable de integración (muda) a  $t$ . La energía total radiada por unidad de frecuencia queda como

$$P(\omega) = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \int \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2 d\Omega. \quad (4.60)$$

Uno no puede conocer el espectro y la potencia radiada más allá de un límite  $\Delta\omega\Delta t = 1$ . En un movimiento periódico, podemos definir la energía radiada por unidad de tiempo y frecuencia dividiendo por el periodo  $T$ :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega dt} \equiv \frac{1}{T} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega}, \quad (4.61)$$

donde el espectro está dado en frecuencias armónicamente relacionadas,  $\omega_n = n\omega_0$  con  $\omega_0 = 2\pi/T$  y  $n$  entero. Esta expresión puede también usarse para definir la distribución en frecuencias de la potencia un campo observado por un tiempo  $T$  suficientemente largo, para cumplir con  $\Delta\omega \rightarrow 0$ .

### 4.3. Sistemas de cargas en movimiento

#### 4.3.1. Aproximación dipolar

La ecuación de Larmor no relativista (4.54) puede generalizarse a un sistema de cargas,

$$P(t) = \sum_i \frac{2q_i^2 a_i^2}{3c^3} = \frac{2|\ddot{\vec{d}}(t)|^2}{3c^3}, \quad \vec{d}(t) = \sum_i q_i \vec{r}_i(t) \rightarrow \int \rho(\vec{r}, t) \vec{r} d^3r, \quad (4.62)$$

siendo  $\vec{d}$  el momento dipolar de la distribución de carga. Los campos de radiación y la distribución de la potencia radiada están dados por,

$$\vec{E}_{rad}(t) = \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})}{rc^2}, \quad \vec{B}_{rad}(t) = -\frac{\hat{r} \times \ddot{\vec{d}}}{rc^2}, \quad \frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (4.63)$$

donde  $\vec{r}$  es la posición del observador con respecto al centro de la distribución de carga, suponiendo  $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i \approx \vec{r}$ .

El espectro de radiación dipolar se obtiene a partir de la transformada del campo eléctrico,

$$\vec{E}_{rad}(\omega) = -\frac{\omega^2}{rc^2} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{d}(\omega)), \quad (4.64)$$

con  $\vec{d}(\omega)$  la transformada del momento dipolar. El factor  $-\omega^2$  proviene de la segunda derivada temporal del dipolo. La aproximación dipolar ignora el término  $\hat{r} \cdot \vec{r}_e/c$  dentro de la exponencial armónica (4.59), lo que da

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\pi c^3} |\vec{d}(\omega)|^2 \sin^2 \theta, \quad P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\vec{d}(\omega)|^2. \quad (4.65)$$

La aproximación dipolar es válida para distribuciones de carga contenidas en una región de tamaño  $L \ll r$ , siendo  $r$  la distancia entre la carga en  $t_e$  y el punto de medición en  $t > t_e$ . Una aplicación directa es el tratamiento de la emisión de frenado, o *bremsstrahlung* (§4.4).

### 4.3.2. Expansión multipolar

Un tratamiento más detallado de una distribución de carga considera la transformada de Fourier de los potenciales vectoriales de acuerdo al principio de superposición,

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\alpha(\vec{x}, t')}{|\vec{r} - \vec{x}|} \delta(t' - t + |\vec{r} - \vec{x}|/c) d^3x dt', \quad (4.66)$$

con  $\alpha = 0$  para el potencial  $\phi$  y la distribución de carga  $\rho c$ . Aquí  $\vec{x}$  denota la posición de cada elemento de la distribución de carga y corriente evaluados en el tiempo retardado  $t'$  correspondiente. Bajo la aproximación de campo lejano, la región de densidad de carga y corriente está localizada y tiene dimensiones mucho menores que la distancia a ella. El origen de coordenadas se sitúa en la distribución, lo que nos permite aproximar  $|\vec{r} - \vec{x}| \approx r - \vec{r} \cdot \vec{x}$ , en el tiempo retardado, y  $|\vec{r} - \vec{x}| \approx r$  en el término inversamente lineal,

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, t') \delta(t' - t + r/c - \hat{r} \cdot \vec{x}/c) d^3x dt'.$$

Considerando la transformada de Fourier de  $A^\alpha$  tenemos,

$$A^\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, t') \delta(t' - t + r/c - \hat{r} \cdot \vec{x}/c) e^{i\omega t} d^3x dt' dt.$$

Al hacer la integral sobre  $t$  con la función  $\delta$  tenemos

$$A^\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \int j^\alpha(\vec{x}, \omega) e^{i\omega \hat{r} \cdot \vec{x}/c} d^3x. \quad (4.67)$$

El desarrollo en serie de la exponencial lleva directamente a la expansión multipolar de los potenciales electromagnéticos,

$$A^\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^n \int (\hat{r} \cdot \vec{x})^n j^\alpha(\vec{x}, \omega) d^3x, \quad (4.68)$$

la cual converge rápidamente para  $|\omega\vec{x}/c| \ll 1 \Rightarrow x \ll \lambda$ .

A primera vista la condición  $x \ll \lambda$  no es obvia en entornos astrofísicos; sin embargo, las dimensiones de  $x$  se refieren a las zonas en las cuales las cargas producen radiación, las cuales son microscópicas. Si tenemos cargas en movimiento relativista, éstas ocupan generalmente regiones de dimensiones  $L \sim v/\omega \sim (v/c)\lambda \ll \lambda$ . Esto permite caracterizar el campo mediante una expansión que generalmente utiliza pocos términos. Sólo para sistemas electromagnéticos macroscópicos, como por ejemplo estrellas de neutrones, no se cumple  $x \ll \lambda$ . Aún así, la expresión general (4.67) sigue siendo aplicable.

Lejos de la región emisora el campo se comporta como una superposición de ondas planas. Determinando  $\vec{A}$  se calculan ambos campos:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = \vec{B} \times \hat{r}.$$

Despreciando términos en  $r^{-2}$ , se tiene

$$\vec{B} = \dot{\vec{A}} \times \hat{r}/c, \quad \vec{E} = (\dot{\vec{A}} \times \hat{r}) \times \hat{r}/c$$

Los primeros términos de la expresión (4.68) dan lugar a los siguientes momentos multipolares:

- $n = 0 \Rightarrow$  **momento dipolar eléctrico**: a partir de

$$\int \vec{j}(\vec{x}, t) d^3x = \int \dot{\vec{x}} \rho(\vec{x}, t) d^3x \Rightarrow \int \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x = -i\omega \int \vec{x} \rho(\vec{x}, \omega) d^3x,$$

se obtiene el potencial

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \int \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} (-i\omega) \vec{d}(\omega), \quad (4.69)$$

y los campos dados por  $\vec{B} = -i\omega \vec{A} \times \hat{r}/c$ ,  $\vec{E} = \vec{B}$ . Expresando los campos en función del tiempo,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{d}}{rc} \Rightarrow \vec{B}^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}} \times \hat{r}}{rc^2}, \quad \vec{E}^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{(\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}) \times \hat{r}}{rc^2}. \quad (4.70)$$

•  $n = 1 \Rightarrow$  **momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.**

La contribución total es de la forma,

$$\vec{A}_1(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \int (\hat{r} \cdot \vec{x}) \vec{j}(\vec{x}, \omega) d^3x,$$

donde, a partir de  $(\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r} = (\hat{r} \cdot \vec{x})\vec{j} - (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{x}$ , separamos la integral como

$$(\hat{r} \cdot \vec{x})\vec{j} = \frac{1}{2} [(\hat{r} \cdot \vec{x})\vec{j} + (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{x}] + \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r}.$$

El término de la derecha corresponde al momento dipolar magnético, mientras que la primera parte en integral, dentro de los corchetes cuadrados, da lugar al término cuadrupolar eléctrico.

→ El término **dipolar magnético** sale de la integral

$$\vec{A}_{dm}^{(1)}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \int \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r} d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \vec{m} \times \hat{r}, \quad (4.71)$$

con el momento dipolar magnético definido por la expresión,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{x} \times \vec{j}) d^3x. \quad (4.72)$$

Los campos electromagnéticos asociados son,

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 (\vec{m} \times \hat{r}) \times \hat{r}, \quad \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{r} \times \vec{m}, \quad (4.73)$$

con  $dP/d\Omega \propto \omega^4 |\vec{m}(\omega)|^2 \sin^2 \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre  $\vec{m}$  y  $\hat{r}$ .

→ El término **cuadrupolar eléctrico** es,

$$\begin{aligned} \vec{A}_{qe}^{(1)}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \int \frac{1}{2} [(\hat{r} \cdot \vec{x})\vec{j} + (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{x}] d^3x, \\ &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \frac{(-i\omega)}{2} \int \vec{x} (\hat{r} \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x}) d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{\omega^2}{6c} \right) \vec{Q}(\hat{r}), \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde la integral es igual a un tercio de  $\vec{Q}(\hat{r}) = \vec{Q} \cdot \hat{r}$ , la proyección del tensor cuadrupolar eléctrico en la dirección  $\hat{r}$ ,  $Q_i(\hat{r}) = \sum_j Q_{ij} (r_j/r)$ , con el momento cuadrupolar dado por

$$Q_{ij} \int (3x_i x_j - x^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}) d^3x, \quad (4.75)$$

definido simétrico y con traza cero. Los campos correspondientes son

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = -i \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{\omega^3}{6c^2} \right) \vec{Q}(\hat{r}) \times \hat{r}, \quad \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -i \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left( \frac{\omega^3}{6c^2} \right) (\vec{Q}(\hat{r}) \times \hat{r}) \times \hat{r}. \quad (4.76)$$

El potencial vectorial, expresado en función del tiempo y desarrollado para  $n = 0, 1$ , queda como,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{d}}{rc} + \frac{\dot{\vec{m}} \times \hat{r}}{rc} + \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}}{6rc^2} + \dots, \quad (4.77)$$

con los campos electromagnéticos dados por,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \left\{ \ddot{\vec{d}} \times \hat{r} + (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}} \times \hat{r} + \dots \right\}, \quad (4.78)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \left\{ (\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \hat{r} \times \ddot{\vec{m}} + \frac{1}{6c} (\ddot{\vec{Q}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right\}. \quad (4.79)$$

La distribución angular de la potencia radiada está dada por

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |r\vec{B}|^2.$$

La expansión multipolar resulta en los términos correspondientes en la ecuación de Larmor,

$$P(t) = \frac{2|\ddot{\vec{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\vec{m}}|^2}{3c^3} + \frac{\|\ddot{\vec{Q}}\|^2}{180c^5} + \dots \rightarrow P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3} (|\vec{d}|^2 + |\vec{m}|^2) + \frac{\omega^6}{90c^5} \|\vec{Q}\|^2 + \dots, \quad (4.80)$$

La expansión a órdenes superiores se puede realizar mediante armónicos esféricos. *(Shu 13, 14; Rybicki §3.1 a 3.3).*

## 4.4. Bremsstrahlung

La radiación producida por la deflexión entre cargas se conoce como *bremssstrahlung*, radiación de frenado o *radiación libre-libre*. Es un mecanismo importante de enfriamiento en plasmas astrofísicos. La caracterización de la emisión debida a dos cargas que interactúan a través de la fuerza Coulombiana puede hacerse con un tratamiento clásico cuando la energía radiada en la interacción es mucho menor que la energía inicial del sistema; el caso opuesto requiere un formalismo cuántico. Se puede emplear una aproximación dipolar para interacciones no relativistas ( $v \ll c$ ), notando que el dipolo de dos partículas de misma carga y misma masa es nulo.

#### 4.4.1. La deflexión de un electrón por un núcleo

Cuando la energía radiada en la interacción de dos partículas, con cargas  $q_1, q_2$  y masas  $m_1, m_2$ , es despreciable en comparación con la energía total del sistema,  $\mathcal{E}$ , podemos describir la interacción entre dos cargas empleando la solución del problema de dos cuerpos con una interacción de Coulomb, con conservación de la energía y del momento angular,  $\vec{L}$ ,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 + \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (4.81)$$

$$\vec{L} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2, \quad (4.82)$$

siendo  $\vec{r}_i, \vec{v}_i$  las posiciones y velocidades respectivas. El caso de interés corresponde al de un electrón,  $q_1 = -e$ ,  $m_1 = m_e$ , deflectado por un núcleo atómico,  $q_2 = Ze$ ,  $m_2 = Am_p$ . El problema se reduce empleando la posición relativa,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , y la masa reducida  $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{Ze^2}{r}, \quad \vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad (4.83)$$

dejando de lado el movimiento del centro de masa. Fijando eje  $\hat{z}$  paralelo a  $\vec{L}$ , podemos describir el movimiento en el plano perpendicular en términos de  $\{r(t), \varphi(t)\}$ . En la descripción clásica trayectoria  $r(\varphi)$  es elíptica, parabólica, o hiperbólica, dependiendo de los valores de  $\mathcal{E}$  y  $L$ , notando que el caso  $\mathcal{E} \leq 0$  no es tratable de forma clásica. El problema de bremsstrahlung refiere a la deflexión de un electrón libre,  $\mathcal{E} > 0$ , con la trayectoria descrita por una hipérbola:

$$r(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cos \varphi + 1}, \quad (4.84)$$

donde  $a = Ze^2/2\mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = (1 + 2\mathcal{E}L^2/mZ^2e^4)^{1/2} > 1$ . Es útil plantear el problema en términos de la velocidad inicial,  $v_0$ , y el parámetro de impacto,  $b$ , relacionados directamente con la energía,  $\mathcal{E} = mv_0^2/2$ , y el momento angular,  $L = mbv_0$ , es decir

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \frac{a}{\tau}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (4.85)$$

donde  $\tau = Ze^2/mv^3$  es la escala de tiempo de la interacción. La aproximación no-cuántica es correcta para,

$$L \gg \hbar \quad \Rightarrow \quad b \gg \frac{\hbar}{mv_0}. \quad (4.86)$$

#### 4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

La solución al problema de dos cuerpos (§4.4.3) muestra que las asíntotas de la trayectoria hiperbólica corresponden con las rectas

$$x = a\varepsilon \pm y(\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} = \frac{Ze^2}{bmv_0^2}$$

definiendo al ángulo de deflexión  $\Delta\theta$  como el ángulo entre las asíntotas. La condición para deflexiones pequeñas queda como

$$b \gg \frac{Ze^2}{mv_0^2}. \quad (4.87)$$

En la figura 4.10 se tomó  $\varepsilon = 2$ , lo cual resulta en una deflexión con exactamente  $\Delta\theta = 60^\circ$ , la cual no puede considerarse pequeña. La cota para deflexiones pequeñas es mayor que la requerida para el tratamiento no-cuántico (4.86) si,

$$\frac{Ze^2}{mv_0^2} \gg \frac{\hbar}{mv_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{c} \ll Z\alpha, \quad (4.88)$$

con  $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$  la constante de estructura fina. Esta condición requiere un movimiento no relativista.

Una ventaja importante de la aproximación de deflexiones pequeñas es el dar expresiones mayormente correctas. Permite suponer al electrón en una trayectoria rectilínea con velocidad constante,  $\vec{v} = v\hat{x}$ , situando al ion estático en el origen, de forma que  $y = b$ . El momento dipolar eléctrico del sistema es  $\vec{d} = -e\vec{r}$ , y su segunda derivada  $\ddot{\vec{d}} = -e\ddot{\vec{a}}$ , con transformada de Fourier

$$-\omega^2 \vec{d}(\omega) = \frac{-e}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\vec{a}}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.89)$$

Al aproximar la trayectoria por una recta (fig. 4.9), la aceleración está dada por,

$$\ddot{\vec{a}} = -\frac{Ze^2}{mb^2} \frac{\hat{x} vt/b + \hat{y}}{\{(vt/b)^2 + 1\}^{3/2}},$$

de donde, reemplazando  $s = vt/b$ ,

$$\vec{d}(\omega) = \frac{e}{\omega^2 \sqrt{2\pi}} \left( -\frac{Ze^2}{mb^2} \right) \frac{b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x} s + \hat{y}}{(s^2 + 1)^{3/2}} \exp\left\{-i\left(\frac{\omega}{v/b}\right)s\right\} ds. \quad (4.90)$$

La interacción dura un tiempo  $\tau \approx b/v$ . Para frecuencias  $\omega \gg v/b$ , la exponencial compleja oscila muy rápidamente y la integral tiende a un valor muy

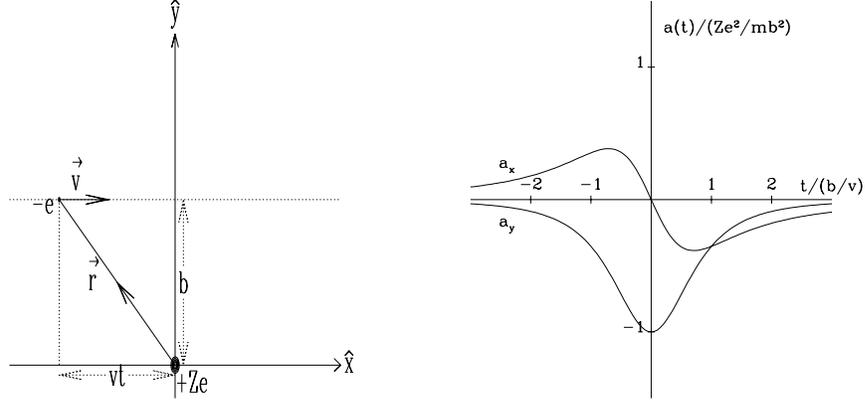


Figura 4.9: Trayectoria y aceleración en una interacción con deflexión pequeña.

pequeño. Para  $\omega \ll v/b$ , aproximamos simple y llanamente la exponencial a uno, resultando en  $d_x(\omega) \rightarrow 0$ , y la integral sobre  $\hat{y}$  cercana a 2, de donde

$$\vec{d}(\omega) \approx \begin{cases} -2(e/\omega^2 \sqrt{2\pi}) (Ze^2/mbv) \hat{y} & \text{para } \omega \ll v/b, \\ 0 & \text{para } \omega \gg v/b. \end{cases} \quad (4.91)$$

De esta expresión podemos estimar la energía radiada por unidad de frecuencia en una colisión de un electrón con un núcleo de carga  $+Ze$  para una velocidad asintótica  $v$  y parámetro de impacto  $b$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v, b) = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\vec{d}(\omega)|^2 = \begin{cases} 8Z^2 e^6 / 3\pi m^2 c^3 v^2 b^2 & \text{para } \omega \ll v/b, \\ 0 & \text{para } \omega \gg v/b, \end{cases} \quad (4.92)$$

El espectro de una interacción se aproxima a una función escalón en  $\omega$ .

Podemos determinar la emisividad de un plasma con densidad de iones  $n_i$  y densidad de electrones  $n_e$ , al considerar el flujo de electrones de velocidad  $v$  incidiendo sobre un núcleo en un anillo de radio  $b$  y ancho  $db$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\omega} = n_i n_e v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v, b) 2\pi b db = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} n_e n_i \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right), \quad (4.93)$$

donde el rango finito de valores de  $b$  asegura la convergencia de la integral.

El límite superior puede tomarse como  $b_{max} \approx v/\omega$ , generalmente menor a  $n_e^{-1/3}$ , excepto en casos extremos ( $T \sim 10$  K,  $\omega \sim 10$  MHz). Por

otro lado, tenemos ya identificados dos límites inferiores: el de validez de la aproximación de deflexiones pequeñas,  $b \gg b_{min}^{(1)} \equiv Ze^2/mv^2$ ; y el límite cuántico,  $b \gg b_{min}^{(2)} \equiv \hbar/mv$ . El límite cuántico es superior al de deflexiones pequeñas si  $v/c \gtrsim Z\alpha$ , donde  $\alpha \simeq 1/137$  es la constante de estructura fina. En este caso, podemos tomar  $b_{min} = Ze^2/mv^2$  dentro de la expresión; en caso contrario, debemos considerar correcciones cuánticas.

El resultado exacto puede referirse a la aproximación aquí tratada definiendo el *factor de Gaunt*,  $g_{ff}(v, \omega)$ , tal que

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} n_e n_i g_{ff}(v, \omega). \quad (4.94)$$

Para deflexiones pequeñas y un movimiento no relativista ( $v/c \ll Z/137$ ),

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{mv^3/Ze^2}{\omega} \right), \quad (4.95)$$

válido para  $\omega \ll mv^3/Ze^2$ . Finalmente, notamos que la condición de que energía radiada sea mucho menor que  $\mathcal{E}$  viene siendo  $(d\mathcal{E}/d\omega)(v/b) \ll mv^2/2$ , lo cual se traduce en

$$b \gg \frac{Ze^2}{mv^2} \left( \frac{v}{c} \right) \left( \frac{16}{3\pi Z} \right)^{1/3}. \quad (4.96)$$

Este caso se cumple automáticamente al considerar deflexiones pequeñas con movimiento no relativista.

#### 4.4.3. Bremsstrahlung clásico: movimiento hiperbólico

El movimiento de un electrón no relativista interaccionando con un núcleo puede describirse empleando la trayectoria hiperbólica (4.84). La dependencia temporal se describe en términos de ecuaciones paramétricas, siendo más conveniente el uso de coordenadas cartesianas,

$$x = a(\varepsilon - \cosh \psi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sinh \psi, \quad t = \tau(\varepsilon \sinh \psi - \psi), \quad (4.97)$$

donde  $\tau = Ze^2/mv^3$  es la escala de tiempo de la interacción,  $a = Ze^2/mv^2$ , y el parámetro  $\psi$  va de  $-\infty$  a  $+\infty$ . El rango de  $x$  es  $(-\infty, +\infty)$ , mientras que  $y \in (-\infty, a(\varepsilon - 1)]$ , con  $t$  función creciente monótona de  $\psi$ . El parámetro de impacto es  $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ .

La figura 4.10 ilustra este movimiento, calculado mediante la expresión paramétrica. El espectro emitido durante un encuentro se obtiene de

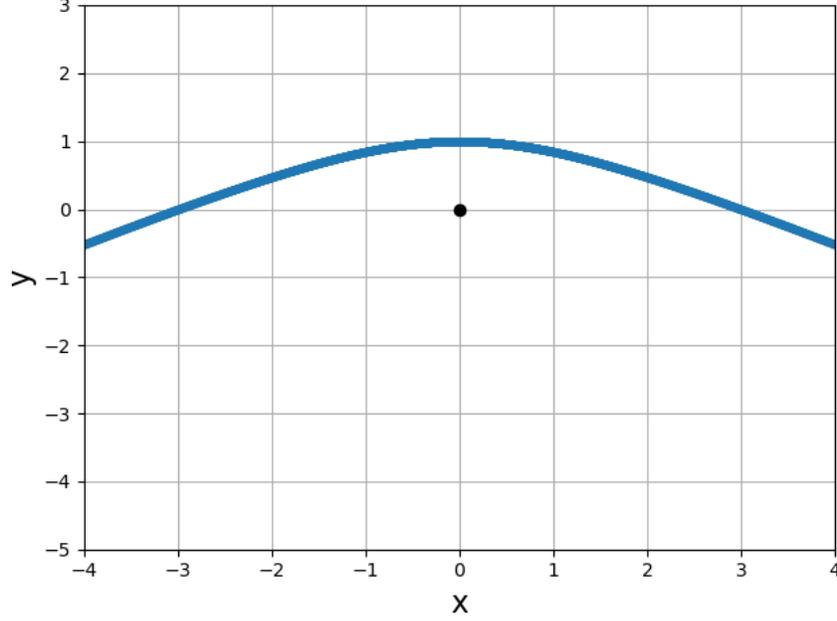


Figura 4.10: Movimiento de una carga en un campo central Coulombiano de acuerdo con la parametrización (4.97). Se tomó  $\varepsilon = 2$  cubriendo un rango en  $\psi$  de  $\pm 3$ , y un movimiento de abajo hacia arriba. El centro de atracción está en el origen, el parámetro de impacto es  $b = \sqrt{3}$ . Se muestra el punto más cercano de la asíntota  $\psi = +\infty$ , separado del origen una distancia  $b$ .

la expresión (4.65), usando la transformada de Fourier del momento dipolar  $\vec{d}(\omega) = m\vec{r}(\omega)(q_1/m_1 - q_2/m_2)$ , con  $m$  la masa reducida. Se usa  $(q_1/m_1 - q_2/m_2) \approx -e/m$  para calcular la transformada de Fourier de  $\{x, y\}$ ,

$$\begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cosh \psi \\ -\sinh \psi \end{pmatrix} \exp\{i\omega\tau(\psi - \varepsilon \sinh \psi)\} d\psi,$$

resultando en

$$x(\omega) = -\frac{a}{2\omega} H_{i\omega\tau}^{(1)'}(i\omega\tau\varepsilon), \quad y(\omega) = \frac{a}{2\omega} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} H_{i\omega\tau}^{(1)}(i\omega\tau\varepsilon), \quad (4.98)$$

con

$$H_p^{(1)} = \frac{1}{i\pi} \int_{\infty}^{+\infty} e^{p\psi - ix \sinh \psi} d\psi,$$

la primera función de Hankel de orden  $p$ , y  $H^{(1)'}$  su derivada, ambas definidas a partir de funciones de Bessel.

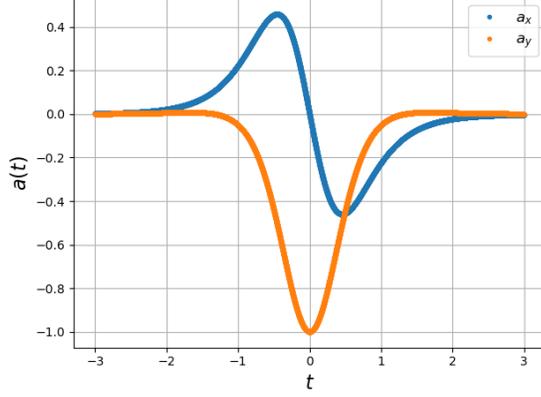


Figura 4.11: Componentes de aceleración de una carga atraída por un campo central Coulombiano. La componente en  $y$  representa la contribución dominante al proceso. En este ejemplo  $\varepsilon = 2$ .

La expresión para la distribución espectral de energía durante una colisión queda como

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2\pi e^2 a^2 \omega^2}{3c^3} (\omega\tau)^2 \left\{ |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon)|^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} |H_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon)|^2 \right\}. \quad (4.99)$$

Al integrar sobre  $b$ , donde  $b db = a^2 \varepsilon d\varepsilon$ , para un plasma con densidad de electrones e iones  $n_e, n_i$ , se obtiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{dV d\omega dt} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^6}{3m^2 c^3 v} n_e n_i \omega\tau |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)| |H_{i\omega\tau}(i\omega\tau)|. \quad (4.100)$$

Este resultado concuerda con el resultado para ángulos pequeños (4.94), con un factor de Gaunt

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \omega\tau |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)| |H_{i\omega\tau}(i\omega\tau)|. \quad (4.101)$$

A frecuencias bajas,  $\omega\tau \ll 1$ ,  $\omega\tau\varepsilon \ll 1$ , se tiene  $H_p(i\omega\tau\varepsilon) \rightarrow (2/i\pi) \ln(2/\gamma\omega\tau\varepsilon)$ , y el comportamiento asintótico de la función de Hankel da una expresión casi idéntica a la de deflexiones pequeñas,

$$g_{ff}(v, \omega) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{2}{\gamma_e} \frac{mv^3}{\omega Z e^2} \right) \quad \text{para } \omega \ll mv^3/Z e^2, \quad (4.102)$$

con  $\gamma_e = e^C \simeq 1.781073$ , y  $C \simeq 0.57721566 \dots$  la constante de Euler.

#### 4.4.4. Bremsstrahlung térmico

Las expresiones anteriores se derivaron para electrones con velocidad fija  $v$ . Una situación más realista es la de una población de electrones con una

distribución de velocidades,  $f(\vec{v})$ , con el espectro dado por el promedio sobre esta distribución. Si la población de electrones está en equilibrio a una temperatura  $T$ ,  $f(v) dv \propto \exp\{-mv^2/2kT\} v^2 dv$ , se tiene

$$\begin{aligned} 4\pi j_\nu &= \frac{d\mathcal{E}(T)}{dt dV d\nu} = \int \frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\nu} f(v) dv \\ &= \frac{32\pi e^6}{3mc^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3km}} n_e n_i Z^2 T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}, \end{aligned} \quad (4.103)$$

donde  $\bar{g}_{ff}$  es un promedio sobre velocidades del factor de Gaunt y  $j_\nu$  la emisividad del proceso, aquí isotrópico. Integrando sobre frecuencias encontramos la potencia radiada por unidad de volumen,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(T)}{dt dV} &= \frac{32\pi e^6}{3hmc^3} \sqrt{\frac{2\pi kT}{3m}} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B \\ &= 1.426 \times 10^{-27} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} T^{1/2} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B, \end{aligned} \quad (4.104)$$

siendo  $\bar{g}_B$  el factor de Gaunt promediado sobre frecuencias. La emisión bremsstrahlung es un proceso muy eficiente de enfriamiento en regiones ionizadas. Depende de la temperatura ( $T^{1/2}$ ), el cuadrado de la densidad ( $n_e n_i$ ) y el cuadrado de la metalicidad ( $Z^2$ ). El libro de Rybicki-Lightman da una discusión sobre el factor de Gaunt, el cual es generalmente del orden de uno.

#### 4.4.5. Absorción libre-libre

De acuerdo con la ley de Kirchhoff, a todo proceso de emisión le corresponde un proceso de absorción, con coeficiente  $\alpha_\nu = j_\nu/B_\nu(T)$ , siendo  $j_\nu$  el coeficiente de emisión y  $B_\nu(T)$  la función de Planck. Para bremsstrahlung térmico obtenemos,

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{4e^6}{3mhc} \sqrt{\frac{2\pi}{3km}} n_e n_i Z^2 T^{-1/2} \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}, \\ &= 3.7 \times 10^8 \text{ cm}^{-1} n_e n_i Z^2 T^{-1/2} \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Una expresión útil en el estudio de estructura estelar es la del coeficiente de absorción medio de Rosseland, dado por el promedio de  $\alpha^{-1}$  con  $\partial B/\partial T$  cómo función de peso,

$$\alpha_R = 1.7 \times 10^{-25} \text{ cm}^{-1} T^{-7/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_R, \quad (4.106)$$

con  $\bar{g}_R$  el promedio correspondiente de la función de Gaunt.

#### 4.4.6. Bremsstrahlung relativista

El tratamiento relativista es importante para interpretar la emisión difusa de rayos  $\gamma$  debida a rayos cósmicos o la generación de cascadas electromagnéticas en la atmósfera, por dar dos ejemplos. Algunas consideraciones iniciales:

- **El rango de parámetros de impacto.** El caso relativista no cuántico implica deflexiones pequeñas, ya que,

$$\frac{v}{c} > Z\alpha \quad \Rightarrow \quad b_{min}^{(1)} = \frac{\hbar}{mv} > b_{min}^{(2)} = \frac{Ze^2}{mv^2}.$$

siendo  $Z\alpha \leq 0.19$  para núcleos más ligeros que el hierro. El límite inferior a parámetros de impacto es entonces  $b_{min} = \hbar/mv \rightarrow \hbar/mc$ .

- **Beaming relativista.** El patrón dipolar clásico se altera por el movimiento, enfocándose a un haz de apertura  $1/\gamma$  en la dirección de movimiento.
- **Efectos cuánticos.** Para parámetros de impacto del orden de  $\hbar/mc$  entran en juego los efectos cuánticos y la emisión puede estar dominada por unos cuantos fotones de alta energía.

El tratamiento se simplifica en un marco de referencia en el cual el electrón tiene momentáneamente velocidad cero. El regreso al marco de referencia del observador considera que la potencia radiada es invariante (ec. 4.55), siendo  $P = d\mathcal{E}/dt$  el cociente de dos componentes temporales que se transforman de misma manera.

En su marco propio de referencia, el electrón percibe el campo electromagnético que resulta de la transformación del campo Coulombiano del núcleo, mismo que le proporciona una aceleración

$$\vec{a}'(t') = -\frac{e\vec{E}'}{m} = -\frac{Ze^2}{m} \frac{\gamma(\hat{x}vt' + \hat{y}b)}{[\gamma^2v^2t'^2 + b^2]^{3/2}}.$$

El desarrollo es completamente análogo al empleado en §4.4.2, obteniéndose,

$$\frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'}(v, b) \approx \frac{8Z^2e^6}{3\pi m^2c^3} \frac{1}{b^2v^2} \quad \text{para} \quad \omega' \ll \frac{\gamma v}{b}, \quad (4.107)$$

con  $d\mathcal{E}'/d\omega'$  despreciable para  $\omega' \gg \gamma v/b$ . Esta expresión, referida al marco de movimiento instantáneo del electrón, es idéntica a (4.92), excepto por el término  $\gamma$  en la frecuencia de corte. La integración sobre parámetros de

impacto debe considerar un flujo de núcleos aumentado por un factor  $\gamma$  en la dirección de movimiento, de forma que un electrón radía

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'dV'd\omega'}(v) = \gamma n_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left( \frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'} \right) 2\pi b db = \frac{16 n_i Z^2 e^6 \gamma}{3m^2 c^3 v} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right).$$

La elección de  $b_{min}$  y  $b_{max}$  requiere especial consideración: en el caso relativista, la restricción de emplear un tratamiento cuántico es más estricta que la de deflexiones pequeñas, por lo que  $b_{min} = \hbar/mv \rightarrow \hbar/mc$ , sin incluir un factor  $\gamma$  ya que  $b$  es transversal a la dirección de movimiento. Por otro lado, si consideramos átomos neutros, el efecto del apantallamiento de las cargas se manifiesta con un corte en  $b_{max} \simeq 1.4a_0 Z^{-1/3}$ , con  $a_0 = \lambda_c/\alpha$  el radio de Bohr. De donde, las pérdidas de energía están dadas por

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt dV d\omega} = \frac{16 n_i Z^2 e^6}{3m^2 c^4} \ln \left( 192 Z^{-1/3} \right). \quad (4.108)$$

Se pierde el factor  $\gamma$  al retornar al marco del observador. El factor numérico incluye la constante de estructura fina y  $v/c \rightarrow 1$ . La pérdida total de energía resulta de integrar sobre frecuencias, desde cero hasta  $\mathcal{E}/\hbar$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{16 Z^2 e^6 \mathcal{E}}{3\hbar m^2 c^4} \ln \left( 192 Z^{-1/3} \right) n_i dV,$$

correspondiendo a una pérdida exponencial de energía que se puede expresar en términos de la densidad de columna,  $dX = n_i dV$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dX} = -\frac{\mathcal{E}}{X_0}, \quad \text{donde} \quad X_0 = \frac{716 \text{ g cm}^{-2} A}{Z(Z + 1.3) (\ln(183 Z^{-1/3}) + 1/8)}, \quad (4.109)$$

con  $A$  la masa atómica del material involucrado. Esta expresión incorpora un cálculo más preciso realizado originalmente por Bethe y Heitler. Para el aire  $X_0 = 36.5 \text{ g cm}^{-2}$ . Un electrón de alta energía en la atmósfera, de espesor total un poco superior a  $1000 \text{ g cm}^{-2}$ , emite fotones de alta energía al atravesar una densidad de columna del orden de  $X_0$ . Véase también §4.7.5.

## 4.5. Radiación sincrotrón

La radiación sincrotrón proviene de electrones relativistas en campos magnéticos. Se caracteriza por dar lugar a un continuo polarizado, indicativo de campos magnéticos, que puede abarcar una región amplia del espectro. Se observa en el medio interestelar, en remanentes de supernova y en galaxias activas, entre otros.

### 4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme

El comportamiento de una carga en un campo magnético se describe mediante la ecuación de movimiento con la fuerza de Lorentz, ec. 4.38,

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = -e \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (4.110)$$

Considerando solamente un campo magnético ( $\vec{E} = 0$ ), la energía de la partícula se conserva y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_B \times \vec{v}, \quad (4.111)$$

definiendo la frecuencia de sincrotrón  $\vec{\omega}_B \equiv e\vec{B}/\gamma mc \Rightarrow \omega_B = eBc/\mathcal{E}$ . La frecuencia de sincrotrón es de la forma  $\omega_B = \omega_\ell/\gamma$ , donde  $\omega_\ell = eB/mc$  es la frecuencia de Larmor, proporcional al campo magnético e independiente de la energía. Estas ecuaciones de movimiento no consideran pérdidas radiativas, tomando en primera aproximación la energía  $\mathcal{E}$  de la partícula como constante. Definiendo el eje  $\hat{z}$  con el campo magnético,  $\vec{B} = B\hat{z}$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v \sin \alpha \{ \hat{x} \cos(\omega_B t + \phi) + \hat{y} \sin(\omega_B t + \phi) \} + \hat{z} v \cos \alpha, \\ \vec{r}(t) &= r_\ell \{ \hat{x} \sin(\omega_B t + \phi) - \hat{y} \cos(\omega_B t + \phi) \} + \hat{z} v \cos \alpha \cdot t + \vec{r}_0, \end{aligned} \quad (4.112)$$

donde  $\alpha$  denota el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , que junto con las constantes  $v$  y  $\phi$ , estipula las condiciones iniciales. La posición  $\vec{x}$  se escala con el radio de Larmor,

$$r_\ell \equiv \frac{v \sin \alpha}{\omega_B} = \frac{p_\perp c}{eB}. \quad (4.113)$$

El movimiento del electrón es una superposición de un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad  $v_\parallel = v \cos \alpha$  sobre el eje  $\hat{z}$ , y un movimiento circular uniforme en el plano  $xy$ , con velocidad  $v_\perp = v \sin \alpha$ , y frecuencia y dirección de giro determinadas por  $\vec{\omega}_B$ .

### 4.5.2. La emisión sincrotrón de un electrón

#### Potencia total radiada

La potencia total radiada por un electrón viene dada por la fórmula de Larmor (ec 4.55) para  $a_\parallel = 0$ ,

$$P(t) = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu a^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a_\perp^2 = \frac{2e^4 B_\perp^2}{3m^2 c^3} \gamma^2 \beta^2, \quad (4.114)$$

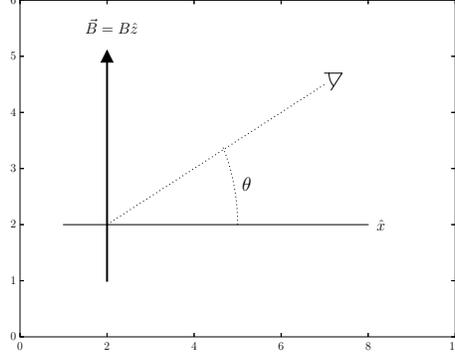


Figura 4.12: Observador en  $\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$ , viendo un electrón moviéndose en el plano  $xy$  bajo la acción de  $\vec{B} = B\hat{z}$ .

con  $B_{\perp} = B \sin \alpha$ . Al promediar sobre ángulo sólido  $\langle \sin^2 \alpha^2 \rangle = 2/3$ , y podemos expresar la potencia promedio radiada por un electrón como

$$P(t) = \frac{2}{3} r_e^2 c (\gamma^2 - 1) \langle B_{\perp}^2 \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T (\gamma^2 - 1) u_B c, \quad (4.115)$$

con  $r_e = e^2/mc^2$  el radio clásico del electrón,  $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$  la sección eficaz de Thompson<sup>5</sup>, y  $u_B = B^2/8\pi$  la densidad de energía del campo magnético. Esta expresión es análoga a la potencia radiada por un electrón mediante efecto Compton en un campo de radiación con densidad de energía  $u_{rad}$ .

El tratamiento cinemático supone  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$  constante, despreciando las pérdidas radiativas de energía. Un electrón en un campo magnético pierde energía en una escala de tiempo

$$\tau \equiv \left( \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^{-1} \simeq \frac{3}{2} \left( \frac{mc}{r_e^2 B_{\perp}^2} \right) \left( \frac{1}{\gamma} \right), \quad \text{para } \gamma \gg 1.$$

### Potencia radiada en función del tiempo

Para caracterizar la emisión sincrotrón en función del tiempo, consideramos  $\vec{B} = B\hat{z}$  y un movimiento circular en el plano  $xy$ , es decir  $\alpha = \pi/2$ ,

$$\vec{\beta} = \beta (\hat{x} \cos \omega_B t_e + \hat{y} \sin \omega_B t_e), \quad \vec{r}_e = r_{\ell} (\hat{x} \sin \omega_B t_e - \hat{y} \cos \omega_B t_e),$$

con  $r_{\ell} = \beta c/\omega_B$ . Situamos al observador con un ángulo  $\theta$  en relación al plano de movimiento del electrón,  $\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$ . El patrón de emisión está

<sup>5</sup> $r_e \simeq 2.8178 \times 10^{-13}$  cm,  $\sigma_T \simeq 6.652 \times 10^{-25}$  cm<sup>2</sup>.

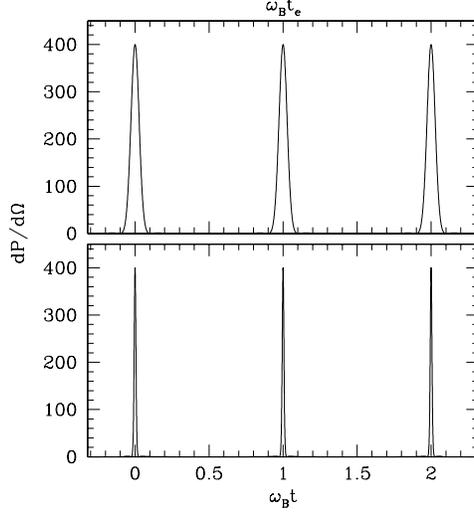


Figura 4.13: Pulso de la emisión sincrotrón visto en términos del tiempo retardado,  $t_e$  y del tiempo medido por el observador,  $t$ . En este ejemplo se tomó  $\beta = 0.8 \Rightarrow \gamma \simeq 1.67$ . El pulso en  $t_e$  tiene duración  $\Delta t_e \propto 1/\gamma$ , mientras que en  $t$  tiene duración  $\Delta t_e \propto 1/\gamma^3$ . Para valores grandes de  $\gamma$ , los pulsos aparecen como líneas.

dado por la ec. 4.51, queda como

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{\hat{r} \times ((\hat{r} - \vec{\beta}) \times \vec{a})}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_e}^2 = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta^2}{4\pi c} \frac{(\beta - \cos \omega_B t_e)^2}{(1 - \beta \cos \omega_B t_e)^6}, \quad (4.116)$$

usando  $\hat{R} \approx \hat{r}$  y anulando el término  $\vec{\beta} \cdot \vec{a}$  en (4.51). El movimiento es armónico tanto en el tiempo retardado  $t_e$  como para el observador ( $t$ ), con alta amplificación alrededor de  $\cos \omega_B t_e \rightarrow 1$ . Se hace la expansión  $\cos \omega_B t_e \rightarrow 1 - (\omega_B t_e)^2/2$ , considerando además  $\beta \rightarrow 1 - 1/\gamma^2$ , de donde

$$t_e \approx t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e/c \Rightarrow t_e \simeq t + r_\ell \sin(\omega_B t_e)/c \simeq t + \beta t_e \simeq 2\gamma^2 t. \quad (4.117)$$

Bajo estas aproximaciones,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} \approx \frac{e^2 \omega_B^2}{4\pi c} 16\gamma^8 \frac{(1 - \gamma^2 \omega_B^2 t_e^2)^2}{(1 + \gamma^2 \omega_B^2 t_e^2)^6} \approx \frac{4e^2 \omega_B^2}{\pi c} \gamma^8 \frac{(1 - \gamma^6 \omega_B^2 t^2)^2}{(1 + \gamma^6 \omega_B^2 t^2)^6}, \quad (4.118)$$

para  $\omega_B t_e \ll 1$ . El comportamiento del pulso de sincrotrón se ilustra en la figura 4.13. La emisión está formada por pulsos de ancho  $\Delta t \approx 2\pi/\gamma^3 \omega_B$ , repitiéndose con periodo  $T = 2\pi/\omega_B$ . Esto resulta en un espectro de emisión que cubre frecuencias desde  $\omega_B$  hasta  $\gamma^3 \omega_B$ . Formalmente el espectro es discreto y la emisión se da en frecuencias  $\omega_n = n\omega_B$  con  $n = 1 \rightarrow \gamma^3$ .

## Distribución angular y espectro sincrotrón

El cálculo del espectro se hace a partir de la expresión (4.59),

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c)} dt \right|^2, \quad (4.119)$$

donde  $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\beta}) = \beta(\hat{e}_1 \sin \omega_B t - \hat{e}_2 \sin \theta \cos \omega_B t)$  define las dos componentes de polarización, por definición perpendiculares a la línea de visión,

$$\hat{e}_1 = \hat{y}, \quad \hat{e}_2 = -\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta,$$

permitiendo escribir

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \beta^2 |\hat{e}_1 A_1(\theta, \omega) + \hat{e}_2 A_2(\theta, \omega)|^2, \quad (4.120)$$

siendo  $A_1, A_2$  las amplitudes de las componentes de polarización orientadas a lo largo de los vectores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  respectivamente.

En el límite  $(\theta \ll \omega_B t) \ll 1 \ll \gamma$ , con  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ ,  $\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2$ ,  $\sin x/x \simeq 1 - x^2/3!$ , el término exponencial en la integral está dado por,

$$\begin{aligned} \exp\{i\omega(t - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t)/c)\} &= \exp\{i\omega t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_B t)/\omega_B t)\}, \\ &\approx \exp\left\{i\omega t \left(1/2\gamma^2 + \theta^2/2 + \omega_B^2 t^2/6\right)\right\}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} A_1(\theta, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega_B t \cdot \exp\{i\omega t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_B t)/\omega_B t)\} dt, \\ &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_B t \cdot \exp\left\{\frac{i\omega t}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3}\right)\right\} dt, \\ A_2(\theta, \omega) &= \sin \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega_B t \cdot \exp\{i\omega t(1 - \beta \cos \theta \sin(\omega_B t)/\omega_B t)\} dt, \\ &\approx \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i\omega t}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3}\right)\right\} dt. \end{aligned}$$

Usando  $q = (\omega_B t)(1/\gamma^2 + \theta^2)^{-1/2}$ ,  $x = (\omega/3\omega_B)(1/\gamma^2 + \theta^2)^{3/2}$ , se tiene

$$\begin{aligned} A_1(\theta, \omega) &\approx \frac{1}{\omega_B} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} q \exp\left\{i\frac{3}{2}x(q + q^3/3)\right\} dq, \\ &\approx \frac{1}{\omega_B} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\theta, \omega) &\approx \frac{\theta}{\omega_B} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \frac{3}{2} x (q + q^3/3) \right\} dq, \\
&\approx \frac{\theta}{\omega_B} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(x),
\end{aligned}$$

con  $K_r$  la función modificada de Bessel de orden  $r$ . El argumento se puede escribir también como,  $x = (\omega/3\gamma^3\omega_B) (1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2}$ .

La distribución espectral y angular de la emisión queda como

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{3e^2}{4\pi^2c} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^2 (1 + \gamma^2\theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(x) + \frac{\gamma^2\theta^2}{1 + \gamma^2\theta^2} K_{1/3}^2(x) \right]. \quad (4.121)$$

El término de la izquierda en los paréntesis cuadrados corresponde a  $A_1$  y el de la derecha a  $A_2$ . Se considera un electrón con movimiento circular uniforme perpendicular al campo magnético. En el caso más general el electrón describe una hélice con inclinación  $\alpha$  con respecto a  $\vec{B}$  y  $\omega_c \equiv 3\gamma^3\omega_B \sin \alpha/2$ .

Integrando sobre frecuencias se obtiene la distribución angular de la energía total radiada,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{7}{16} \frac{e^2c}{\omega_B} \frac{\gamma^5}{(1 + \gamma^2\theta^2)^{5/2}} \left[ 1 + \frac{5}{7} \left( \frac{\gamma^2\theta^2}{1 + \gamma^2\theta^2} \right) \right]. \quad (4.122)$$

La emisión consiste en un pulso de ancho  $\Delta\theta \approx 1/\gamma$  con un factor de ampliación sobre la emisión promedio de orden  $\gamma^5$  (fig. 4.14).

Al integrar sobre ángulo sólido se obtiene el espectro emitido como función de  $\omega/\omega_c$ ,

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \alpha}{2\pi mc^2} F \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) = P_{\parallel}(\omega) + P_{\perp}(\omega), \quad (4.123)$$

donde la potencia radiada por cada componente es

$$\begin{pmatrix} P_{\perp}(\omega) \\ P_{\parallel}(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2} \begin{pmatrix} F(\omega/\omega_c) + G(\omega/\omega_c) \\ F(\omega/\omega_c) - G(\omega/\omega_c) \end{pmatrix}, \quad (4.124)$$

con  $F$  y  $G$  las funciones de emisión sincrotrón, dadas por Westfold (1959),

$$F(x) \equiv x \int_x^{\infty} K_{5/3}(y) dy, \quad G(x) \equiv x K_{2/3}(x). \quad (4.125)$$

$K_r(x)$  es la función modificada de Bessel de orden  $r$  (Figura 4.14). La función  $F(x)$  tiene como límites asintóticos,

$$F(x) \rightarrow \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left( \frac{x}{2} \right)^{1/3}, \quad (x \ll 1); \quad F(x) \rightarrow \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x}, \quad (x \gg 1).$$

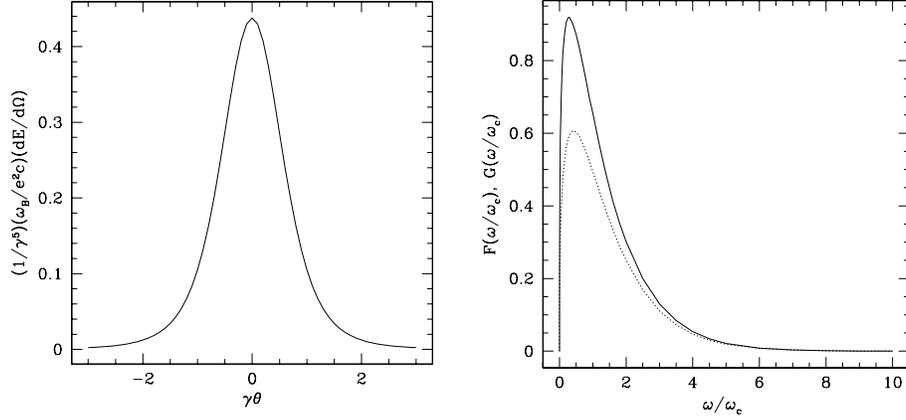


Figura 4.14: *Izquierda:* distribución angular de la emisión sincrotrón. *Derecha:* distribución espectral de la emisión sincrotrón dada por las funciones  $F(x)$  -línea sólida- y  $G(x)$  -línea punteada.

El grado de polarización de la radiación es

$$\Pi(\omega) = \frac{P_{\perp}(\omega) - P_{\parallel}(\omega)}{P_{\perp}(\omega) + P_{\parallel}(\omega)} = \frac{G(\omega/\omega_c)}{F(\omega/\omega_c)}. \quad (4.126)$$

Esta fórmula describe la emisión por un sólo electrón. En general tendremos una población de electrones y su distribución de energía determinará el espectro total y la polarización correspondiente.

### 4.5.3. Radiación sincrotrón de una población de electrones

Las poblaciones de electrones relativistas se describen muchas veces mediante leyes de potencias, en lugar de una función de Maxwell-Boltzmann al no estar en equilibrio termodinámico. La descripción de la población no térmica como una ley de potencias puede ser válida dentro de un intervalo de energías, o equivalentemente de valores de  $\gamma$ ,

$$N(\gamma)d\gamma = C \gamma^{-p} d\gamma,$$

con  $p$  el índice espectral. La potencia total radiada está dada por

$$P(\omega) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega)\gamma^{-p}d\gamma \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x)x^{(p-3)/2}dx,$$

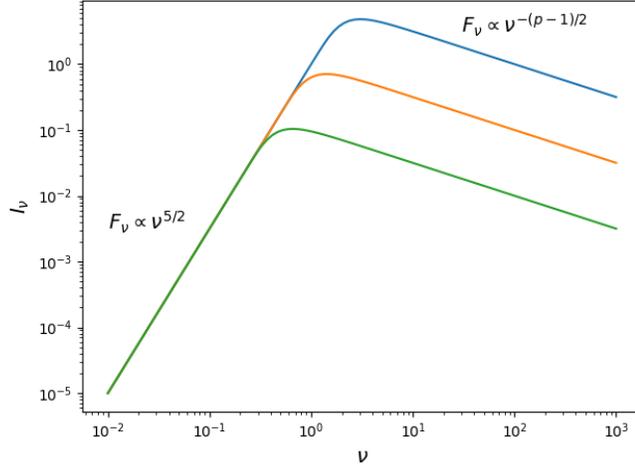


Figura 4.15: Ilustración del espectro sincrotrón de una región emisora. La frecuencia  $\nu_m$  indica la transición de régimen ópticamente grueso a delgado. Cuando hay estimaciones de las dimensiones de la región es posible deducir el valor del campo magnético  $B$ .

al integrar sobre  $x = \omega/\omega_c = \omega/\gamma^2\omega_\ell$ , con  $\omega_\ell = eB \sin \alpha/mc$  la frecuencia de Larmor,

$$\Rightarrow P(\omega) \propto \omega^{-s} = \omega^{-(p-1)/2}. \quad (4.127)$$

El índice espectral de la radiación se relaciona con la distribución de electrones a través de  $s = (p-1)/2$ . Los límites de  $x$  corresponden frecuentemente a un intervalo amplio de energías,  $\gamma_1 \ll \gamma_2 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \infty$ , de manera que  $P(\omega)$  tiende a su forma asintótica, la integral de (4.123),

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}C}{2\pi(p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{e^2\omega_\ell}{c}\right) \left(\frac{\omega}{3\omega_\ell}\right)^{-(p-1)/2}. \quad (4.128)$$

La polarización queda simplemente como:

$$\Pi = \frac{p+1}{p+7/3}. \quad (4.129)$$

#### 4.5.4. Auto-absorción y función fuente

A todo proceso de emisión le corresponde un proceso de absorción recíproco. En equilibrio termodinámico, el coeficiente de absorción,  $\alpha_\nu$ , se relaciona con la emisividad,  $j_\nu$ , a través de la ley de Kirchhoff,  $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$ , con  $B_\nu(T)$  la función de Planck. La emisión sincrotrón es importante fuera del equilibrio termodinámico, y se requiere relacionar emisión y absorción a través de

$j_\nu = \alpha_\nu S_\nu$ , con  $S_\nu$  la función fuente,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{n_1 g_2 / n_2 g_1 - 1}, \quad (4.130)$$

siendo  $n_1 = n(E_1)$ ,  $n_2 = n(E_2)$  las poblaciones y  $g_1 = g(E_1)$ ,  $g_2 = g(E_2)$  los pesos estadísticos de dos niveles con energías  $E_1$ ,  $E_2$ , y separados por  $h\nu = E_1 - E_2$ . Nótese que formalmente la energía de un electrón en un campo magnético está cuantizada. Para una población de electrones relativistas en ley de potencias se tiene  $g(E) \propto E^2$ ,  $n(E) \propto E^{-p}$ , de donde,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{(E_1/E_2)^{-p+2} - 1} = \frac{2h\nu^3/c^2}{((E + h\nu)/E)^{p-2} - 1} \simeq \frac{2h\nu^3/c^2}{(p-2)(h\nu/E)},$$

considerando  $h\nu \ll E$ , para un electrón de energía  $E$  que emite radiación con frecuencia  $\nu$ . La relación entre ambas se obtiene al considerar que la mayor parte de la emisión se da alrededor de la frecuencia de corte,

$$h\nu \simeq \hbar\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_\ell = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\left(\frac{eB}{mc}\right) \Rightarrow E \simeq mc^2\left(\frac{\nu}{\nu_\ell}\right)^{1/2}$$

con  $\omega_\ell = 2\pi\nu_\ell = eB/mc$  la frecuencia de Larmor, de donde

$$S_\nu \simeq \frac{m\nu^{5/2}\nu_\ell^{-1/2}}{(p/2-1)} \propto \nu^{5/2} B^{-1/2}. \quad (4.131)$$

Este es el espectro de emisión de un sistema de electrones en un campo magnético ópticamente grueso.

Dado  $j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$  y la función fuente,  $S_\nu$ , se puede estimar el coeficiente de absorción,

$$\alpha_\nu \propto \nu^{-(p+4)/2} B^{(p+2)/2}.$$

La absorción es mayor a frecuencias bajas, de forma que por debajo de cierta frecuencia,  $\nu < \nu_m$ , el camino libre medio es menor que las dimensiones de la región emisora y el espectro está dado por el caso ópticamente grueso,  $I_\nu \rightarrow S_\nu \propto \nu^{5/2}$ . Para  $\nu > \nu_m$  el medio es ópticamente delgado y  $I_\nu \rightarrow j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$ . El valor de  $\nu_m$  contiene información importante. Para una esfera de radio  $R$  en el régimen ópticamente grueso el flujo está dado por  $F_\nu = S_\nu \pi \theta^2$ , siendo  $\theta = R/r$  el radio angular de la fuente. Si las mediciones permiten estimar  $\theta$ , así como la frecuencia  $\nu_m$ , y el flujo  $F_m = F_\nu(\nu_m)$ , es posible deducir el campo magnético mediante la expresión (4.131).

## 4.6. El efecto Compton

### 4.6.1. Dispersión de Thomson

Se denomina dispersión de Thomson, o dispersión electrónica, a la dispersión de una onda plana electromagnética ocasionada por un electrón libre. Al incidir la onda el electrón oscila de acuerdo a la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).$$

La dispersión de Thomson se restringe al caso no relativista ( $v \ll c$ ), despreciando el efecto del campo magnético, menor al eléctrico por un factor  $v/c$ . Para una onda monocromática propagándose con  $\hat{k} = \hat{z}$ , la ecuación de movimiento del electrón, descrito por  $\vec{x}_e(t)$ , es

$$m\ddot{\vec{x}}_e \simeq -eE e^{i(kz - \omega t)} \hat{\varepsilon},$$

con  $\hat{\varepsilon} \perp \hat{z}$  el vector de polarización del campo eléctrico.

La potencia radiada y el patrón de emisión se estiman mediante la aproximación dipolar,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})|^2}{4\pi c^3} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \left\{ 1 - (\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon})^2 \right\}, \quad (4.132)$$

siendo  $\vec{d} = -e\vec{x}_e$  el momento dipolar del electrón,  $\ddot{\vec{d}} = -e\ddot{x}_e\hat{\varepsilon}$ , y  $\hat{r}$  la línea de visión. La potencia promedio radiada por unidad de ángulo sólido queda como

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c|E|^2}{8\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2). \quad (4.133)$$

Podemos cuantificar el efecto de la dispersión Thomson comparando la onda plana incidente sobre el electrón y la emisión dipolar ocasionada por la partícula a través de la *sección eficaz*, sea en su forma diferencial,  $d\sigma/d\Omega$ , o integrada,  $\sigma$ :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2), \quad (4.134)$$

con  $r_e = e^2/mc^2$  el radio clásico del electrón. Fijando  $\hat{r} = \hat{z} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta$ , obtenemos un patrón angular  $\propto (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi)$  para polarización lineal,  $\hat{\varepsilon} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$ . Para polarización circular,  $\hat{\varepsilon} = (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$ , se obtiene el patrón dipolar,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (4.135)$$

que se obtiene también para radiación no polarizada al integrar polarización lineal sobre  $\phi$ . La integración de (4.134) sobre ángulo sólido resulta en la sección eficaz de Thomson,

$$\sigma = \sigma_T \equiv \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (4.136)$$

En la dispersión de Thomson no hay alteración del espectro incidente: la luz dispersada tiene la misma frecuencia que la onda incidente. Al considerar el caso relativista, descrito por el efecto Compton, observamos un cambio en la frecuencia de la radiación.

#### 4.6.2. El efecto Compton

El efecto Compton es la dispersión de un electrón por un fotón, proceso descrito como una colisión entre ambos,

$$\gamma e \rightarrow \gamma e. \quad (4.137)$$

Este tratamiento es más apropiado que el de la dispersión Thomson para fotones con energías comparables o mayores a la de la masa del electrón en reposo,  $mc^2$ . Si la energía inicial del electrón es despreciable, el proceso se puede describir como dispersión electrónica (“electron scattering”), empleando la conservación del cuadrivector de energía y momento,

$$p_{e(i)} + p_{\gamma(i)} = p_{e(f)} + p_{\gamma(f)}, \quad (4.138)$$

suponiendo al electrón inicialmente en reposo,  $p_{e(i)} = (mc; 0)$ , y posteriormente  $p_{e(f)} = (\gamma mc; \gamma m \vec{\beta} c)$ . El fotón tiene  $p_{\gamma(i)} = (\hbar\omega_0/c)(1; \hat{k}_0)$  antes de la colisión, y  $p_{\gamma(f)} = (\hbar\omega_1/c)(1; \hat{k}_1)$  después de ella. Se pueden manipular las ecuaciones para obtener la fórmula de Compton que relaciona las energías inicial y final del fotón:

$$\hbar\omega_1 = \frac{\hbar\omega_0}{1 + (\hbar\omega_0/mc^2)(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta), \quad (4.139)$$

con  $\hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1 = \cos\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre el fotón incidente y el dispersado, y  $\lambda_c = h/mc$  la longitud de onda de Compton<sup>6</sup>. Notamos que  $\omega_1 \leq \omega_0$ , siendo que el fotón cede energía al electrón. Esto es siempre cierto en el marco de referencia del electrón.

---

<sup>6</sup> $\lambda_c \approx 0.02426 \text{ \AA}$

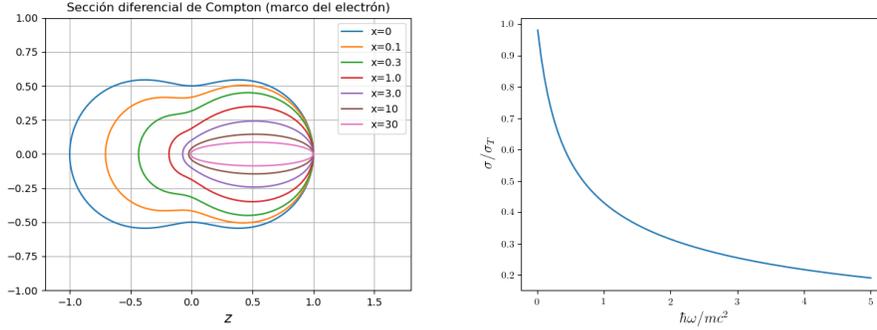


Figura 4.16: *Izquierda*: sección diferencial de Klein-Nishina para electrones en reposo ( $\rightarrow$  en el marco de referencia del electrón). El fotón original va de izquierda a derecha ( $\hat{k}_0 = \hat{z} \Rightarrow \theta = 0$ ). Los valores de  $x = \hbar\omega_0/mc^2$  están indicados. *Derecha*: sección eficaz total.

Las variables después de la interacción quedan definidas de manera ambigua: es necesario especificar  $\cos\theta$  para poder calcular  $\omega_1$ , así como la cinemática del electrón. El proceso es aleatorio, con la probabilidad de que el fotón tenga cierta energía final  $\hbar\omega_1$  dictada por la sección eficaz del proceso. La sección eficaz diferencial se obtiene mediante el formalismo de la electrodinámica cuántica, resultando en la expresión de Klein-Nishina:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \left[ \frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_0} - \sin^2\theta \right]. \quad (4.140)$$

Para  $\omega_1 \simeq \omega_0$  se recobra la sección eficaz diferencial de Thomson. Podemos expresar  $d\sigma/d\Omega$  como función de  $\cos\theta$  y  $x = \hbar\omega_0/mc^2$ , substituyendo ec.(4.139) en ec.(4.140), y de ahí ver el comportamiento de  $d\sigma/d\Omega(\theta)$ , que se ilustra en la figura 4.16. Al aumentar la energía del fotón, el momento que recibe el electrón sigue la forma de  $d\sigma/d\Omega$ , menos isotrópica, favoreciendo la dispersión con  $\theta$  pequeñas.

La expresión (4.140) es integrable analíticamente, resultando en la sección eficaz total,

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{x} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \ln(1+2x) + \frac{1}{4} + \frac{2}{x} - \frac{1}{4(1+2x)^2} \right]. \quad (4.141)$$

En el régimen no relativista,  $x \ll 1$ ,

$$\sigma \approx \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26}{5}x^2 + \dots \right), \quad (4.142)$$

mientras que en el extremo relativista,  $x \gg 1$ , la sección eficaz tiende lentamente a cero,

$$\sigma \approx \frac{\pi r_e^2}{x} \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right). \quad (4.143)$$

### 4.6.3. Efecto Compton inverso

En entornos astrofísicos es común tener electrones en movimiento relativista, de tal manera que en la interacción Compton la transferencia de energía se da del electrón al fotón. Este caso corresponde al *efecto Compton inverso*. Formalmente la diferencia entre el efecto Compton y el Compton reside en el marco de referencia en el cual se describe el proceso. En el caso general, la interacción de un electrón, de momento  $\gamma m \vec{\beta} c$ , con un fotón, de momento  $(\hbar \omega / c) \hat{k}$ , se representa con la conservación del cuadrivector de energía-momento,

$$p_0^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar \omega_0 / c + \gamma_0 m c \\ \hbar \omega_0 \hat{k}_0 / c + \gamma_0 \vec{\beta}_0 m c \end{pmatrix} = p_1^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar \omega_1 / c + \gamma_1 m c \\ \hbar \omega_1 \hat{k}_1 / c + \gamma_1 \vec{\beta}_1 m c \end{pmatrix}, \quad (4.144)$$

representando los sub-índices 0, 1 antes y después de la interacción. La norma,  $p_\alpha p^\alpha = -m^2 c^2 (1 + 2\gamma_0 (\hbar \omega_0 / m c^2) (1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0))$ , es por construcción invariante ante transformaciones de Lorentz.

Para simplificar la notación, escribimos la conservación de momento energía (4.144) empleando unidades tales que  $\hbar / m c^2 = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \gamma_0 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \gamma_1 \\ \omega_1 \hat{k}_1 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.145)$$

Eliminando  $\gamma_1, \gamma_1 \vec{\beta}_1$ , obtenemos la expresión general para la dispersión de Compton,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0 \omega_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0)}{\gamma_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_1) + \omega_0 (1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)}. \quad (4.146)$$

En primera instancia notamos que:

- Para un electrón en reposo  $\beta_0 = 0, \gamma_0 = 1$ , recuperamos la expresión (4.139).
- Si  $\hat{k}_1 = \hat{k}_0$  entonces  $\omega_1 = \omega_0$ , y no hay dispersión.
- La expresión es aplicable a electrones no relativistas, como en la dispersión del fondo de micro-ondas por electrones en cúmulos de galaxias - el efecto Sunyaev-Zeldovich.

El caso Compton inverso corresponde al límite  $\gamma_0 \gg \max(1, \omega_0)$ . El fotón dispersado se propaga generalmente en la misma dirección que el electrón original,  $\hat{k}_1 \rightarrow \hat{\beta}_0$ , como se puede verificar con la transformación entre el centro de momento y el marco del observador (4.153) para el fotón dispersado,

$$\hat{k}_1 = \frac{\gamma_t \vec{\beta}_t + (\gamma_t - 1) (\hat{\beta}_t \cdot \hat{k}'_1) \hat{\beta}_t + \hat{k}'_1}{\gamma_t (1 + \vec{\beta}_t \cdot \hat{k}'_1)} \longrightarrow \hat{\beta}_t \longrightarrow \hat{\beta}_0, \quad (4.147)$$

para  $(\gamma_t, \gamma_0) \gg 1$ . En ese caso obtenemos de (4.146),

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0 \omega_0 (1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0)}{\gamma_0 (1 - \beta_0) + \omega_0 (1 - \hat{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0)} \simeq \frac{2\gamma_0^2 \omega_0 (1 - \beta_0 \cos \theta_0)}{1 + 2\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0)}, \quad (4.148)$$

con la aproximación válida para Compton inverso, donde  $\gamma_0 \gg \omega_0$ , y el ángulo  $\theta_0$  definido por  $\hat{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0 = \cos \theta_0$ . El valor de  $\cos \theta_0$  va de  $-1$  a  $+1$ , de forma que la expresión 4.148 describe el espectro de energías de una colisión entre electrones y fotones mono-energéticos:

- si  $\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0) \ll 1$ , tenemos  $\omega_1 \simeq 2\gamma_0^2 \omega_0 (1 - \beta_0 \cos \theta_0)$ ; el fotón adquiere una energía del orden  $2\gamma^2 \omega_0$ , acotada a  $\omega_1 < 4\gamma^2 \omega_0$ .
- si  $\gamma_0 \omega_0 (1 - \cos \theta_0) \gg 1$ , entonces  $\omega_0 \simeq \gamma_0$ . El fotón adquiere prácticamente toda la energía del electrón. Por otro lado, la disminución de la sección eficaz da lugar a la *supresión de Klein-Nishina*.

La sección eficaz total es invariante y dada por (4.141), con  $x = \gamma_0$ .

## 4.7. Procesos de altas energías

### 4.7.1. Interacciones fotón - electrón

La descripción de la colisión entre pares de partículas, como el efecto Compton, de tipo,

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4, \quad (4.149)$$

se hace en base a la conservación de energía y momento que podemos escribir como,

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0, \quad (4.150)$$

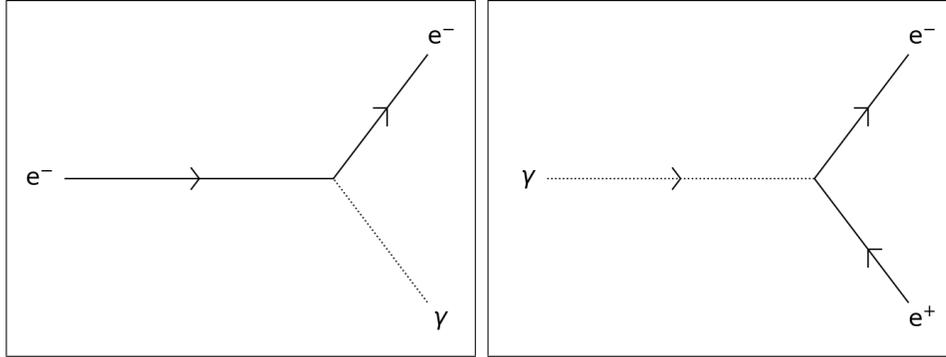


Figura 4.17: Interacción electrodinámica básica: emisión de un fotón (línea punteada) por un electrón (línea sólida con dirección)  $e^- \rightarrow e^- \gamma$ , yendo de izquierda a derecha. Puede rotarse y describir la creación de un par  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ , con la dirección invertida para la anti-partícula; o la aniquilación de un par  $e^+ e^- \rightarrow \gamma$ . El procesos base no conserva energía-momento.

donde  $q_j$  representa  $\pm$  el cuadrivector de energía-momento de la  $j$ -ésima partícula. Escrita como tal, la expresión (4.150) puede describir la reacción (4.149) o, intercambiando signos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \\ \text{(II)} \quad 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \\ \text{(III)} \quad 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}, \end{array} \right. \quad (4.151)$$

donde  $\bar{j}$  representa la anti-partícula de  $j$ . Las tres interacciones en (4.151) corresponden a los tres canales de una misma reacción general.

En particular la interacción entre dos electrones y dos fotones puede darse como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \implies \text{efecto Compton}, \\ \text{(II)} \quad \gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^- \implies \text{producción de pares}, \\ \text{(III)} \quad e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \implies \text{aniquilación de pares}. \end{array} \right. \quad (4.152)$$

Estos procesos se representan y describen mediante *diagramas de Feynman*, contruidos conectando de forma secuencial la interacción básica entre electrones y fotones, descrita por el diagrama en la figura 4.17. El diagrama base no cumple individualmente con la conservación de energía y momento, pero la combinación de diagramas representando una interacción observada sí debe cumplirla en conjunto. Las partículas involucradas en la reacción se encuentran en los extremos desconectados, mientras que las partículas entre dos vértices son partículas “virtuales”.

La figura 4.19 muestra los diagramas correspondientes al canal de Compton (expresados en 4.152). La producción y la aniquilación de pares están físicamente relacionados con el efecto Compton. A continuación se revisan brevemente.

#### 4.7.2. Efecto Compton: centro de momento

En general es conveniente considerar el marco de referencia del centro de momento, donde  $\vec{p} = 0$ , definido por la transformación (4.15), que para el efecto Compton es,

$$\vec{\beta}_t = \vec{p}c/E = \frac{\omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0}{\omega_0 + \gamma_0} \Rightarrow \gamma_t = \frac{\omega_0 + \gamma_0}{\sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)}}. \quad (4.153)$$

Por construcción, al hacer la transformación de Lorentz obtendremos un cuadvivector de la forma,

$$p^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \omega'_0 + \gamma'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_1 + \gamma'_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.154)$$

con  $\sqrt{-p_{\alpha'} p^{\alpha'}} = \omega'_0 + \gamma'_0 = \sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)} = \omega'_1 + \gamma'_1$ , indicando el sub-índice 1 las energías del fotón y electrón después de la interacción. El hecho de que el momento sea nulo implica,

$$\gamma' \vec{\beta}' + \omega' \hat{k}' = 0 \Rightarrow \gamma' = \sqrt{1 + \omega'^2}. \quad (4.155)$$

Este resultado, junto con la conservación de energía, implica

$$\omega'_1 = \omega'_0, \quad \gamma'_1 = \gamma'_0. \quad (4.156)$$

La interacción no cambia las energías del fotón y electrón en el centro de momento, las cuales están necesariamente relacionadas mediante la expresión (4.155). La interacción se puede describir mediante una rotación del eje de propagación del fotón,  $\hat{k}'_0 \rightarrow \hat{k}'_1$ , descrita de manera probabilística por la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina, referida al centro de momento,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2/2}{(\gamma + \omega)^2} \left\{ \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(\gamma + \omega)^2(\gamma + \omega \cos \theta)^2} + \frac{(\gamma + \omega)^2 + (\gamma + \omega \cos \theta)^2 - 2(1 - \cos \theta)}{(\gamma + \omega)(\gamma + \omega \cos \theta)} \right\} \quad (4.157)$$

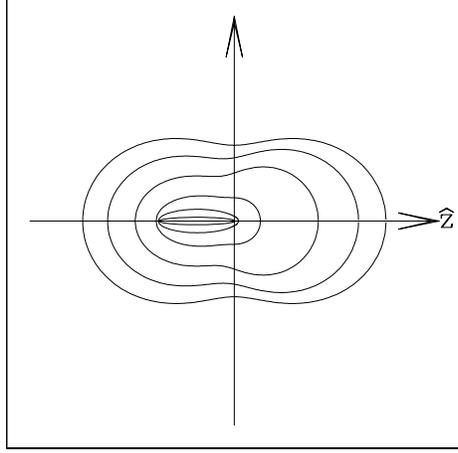


Figura 4.18: Sección diferencial de Klein-Nishina en el centro de momento. Los contornos del externo al interno, corresponden con  $\omega = 0.0, 0.1, 0.3, 1.0, 3.0, 10.0$ . El contorno más interno muestra la tendencia a  $\cos \theta = -1$  para altas energías, así como la disminución de  $\sigma$ ; el más externo corresponde a la dispersión de Thomson.

donde  $\cos \theta = \hat{k}'_0 \cdot \hat{k}'_1$ ,  $\gamma^2 = 1 + \omega^2$ . La forma de  $d\sigma/d\Omega$  se muestra en la figura 4.18. Los límites son

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\rightarrow \frac{r_e^2}{2} \{1 + \cos \theta^2\} && \text{para } \omega \ll 1, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &\rightarrow \frac{r_e^2}{2} \left\{ \frac{5/8 + \cos \theta/4 + \cos^2 \theta/8}{\omega^2(1 + \cos \theta) + 1/2} \right\} && \text{para } \omega \gg 1. \end{aligned} \quad (4.158)$$

El primer caso corresponde a la dispersión de Thomson; para  $\omega \gg 1$  hay un marcado incremento de  $d\sigma/d\Omega$  alrededor de  $\cos \theta = -1 \Leftrightarrow \hat{k}'_1 = -\hat{k}'_0$ . La sección eficaz total viene dada por (4.140).

### 4.7.3. Producción de pares

La producción de un par electrón-positrón por dos fotones,  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ , corresponde al tercer diagrama de la figura (4.19). Empleando unidades en las que  $\hbar/mc^2 = 1$ , la conservación de energía-momento se escribe como

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \omega_1 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \omega_1 \hat{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \gamma_1 \\ \gamma_0 \vec{\beta}_0 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix},$$

con norma,

$$-p_\alpha p^\alpha = 2\omega_0\omega_1(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1) = 2 + 2\gamma_0\gamma_1(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_1). \quad (4.159)$$

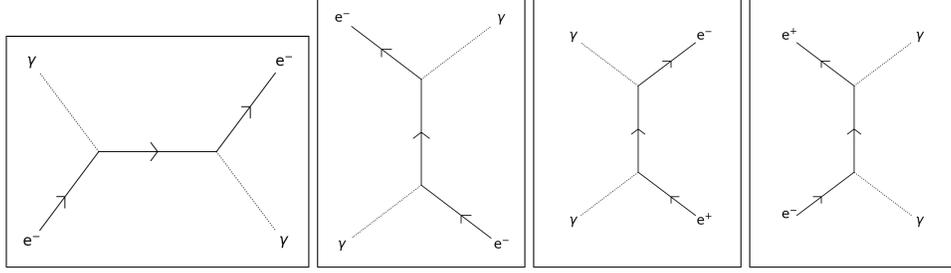


Figura 4.19: A la izquierda dos diagramas representando la dispersión Compton; el tercer diagrama representa la producción de un par  $e^+e^-$  por dos fotones; y a la derecha la aniquilación un electrón y un positrón produciendo dos fotones.

El problema se simplifica en el centro de momento, aplicando la transformación

$$\vec{\beta}_t = \frac{\omega_0 \hat{k}_0 + \omega_1 \hat{k}_1}{\omega_0 + \omega_1}, \quad \gamma_t = \frac{\omega_0 + \omega_1}{\sqrt{2\omega_0\omega_1(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)}}.$$

En el centro de momento ambos fotones tienen misma energía  $\omega$  y se propagan en direcciones opuestas,  $\pm \hat{k}$ . Los electrones se comportan de la misma manera, teniendo ambos la misma energía  $\gamma$ , y moviéndose en direcciones opuestas,  $\pm \vec{\beta}$ . La conservación de energía en el centro de momento implica,

$$\omega = \gamma \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{\omega_0\omega_1(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1)}/2, \\ \gamma = \sqrt{1/2 + \gamma_0\gamma_1(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_1)}/2, \end{cases} \quad (4.160)$$

requiriendo satisfacer el umbral  $\omega \geq 1$ . La interacción consiste en el intercambio de partículas y la re-orientación de los momentos,  $\hat{k} \rightarrow \hat{\beta}$ , determinada probabilísticamente por la sección eficaz diferencial, función de  $\omega$  y de  $\hat{k} \cdot \hat{\beta} = \cos \theta$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{4} \frac{(\omega^2 - 1)^{1/2}}{\omega^3} \left\{ \frac{\omega^2 + (\omega^2 - 1)(1 + \sin^2 \theta)}{\omega^2 - (\omega^2 - 1) \cos^2 \theta} - \frac{2(\omega^2 - 1)^2 \sin^4 \theta}{(\omega^2 - (\omega^2 - 1) \cos^2 \theta)^2} \right\}. \quad (4.161)$$

La sección eficaz está indefinida para  $\omega < 1 \Rightarrow \hbar\omega < mc^2$ , la energía umbral para la producción del par en el CM. Se expresa mejor en términos de la velocidad,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^4}{4} (1 - \beta^2) \beta \left\{ \frac{1 - \beta^4 + 2\beta^2 \sin^2 \theta - \beta^4 \sin^4 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \right\}.$$

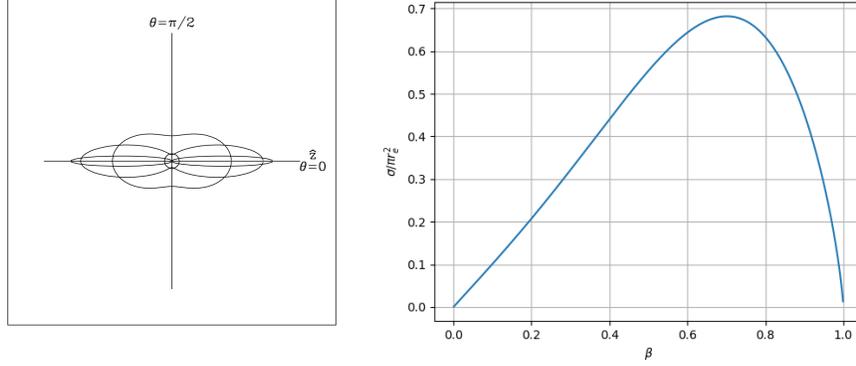


Figura 4.20: Sección eficaz diferencial (*izquierda*) y total (*derecha*) para la producción de pares  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ . La sección eficaz diferencial tiene comportamiento bipolar a bajas energías, pero se elonga a medida que  $\omega$  aumenta. La sección eficaz total es nula si  $\omega = \gamma \leq 1$ ; su máximo es en  $\beta \approx 0.701 \Rightarrow \gamma \approx 1.43$ .

La integración sobre ángulo sólido da la sección diferencial total, que se muestra en la figura (4.20),

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi r_e^2}{2\omega^2} \left\{ \left( \frac{2\omega^4 + 2\omega^2 - 1}{\omega^4} \right) \ln \left( \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}} \right) - \frac{2(\omega^2 - 1)^{1/2}(\omega^2 + 1)}{\omega^3} \right\}. \quad (4.162)$$

Que también se expresa de mejor manera en término de la velocidad  $\beta$ ,

$$\sigma(\beta) = \frac{\pi r_e^2}{2}(1 - \beta^2) \left\{ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right\}. \quad (4.163)$$

#### 4.7.4. Aniquilación electrón-positrón; positronio

En el proceso de aniquilación de pares,  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ , cumple la misma relación de invariancia que la producción de pares, ec. (4.159). La diferencia es la disponibilidad automática de la energía suficiente para producir los dos fotones. El cálculo de la sección eficaz de este proceso está estrechamente ligado al del proceso inverso, de forma que las secciones eficaces cumplen

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ee \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\gamma\gamma \rightarrow ee}, \quad \sigma_{ee \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{2}{\beta^2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow ee},$$

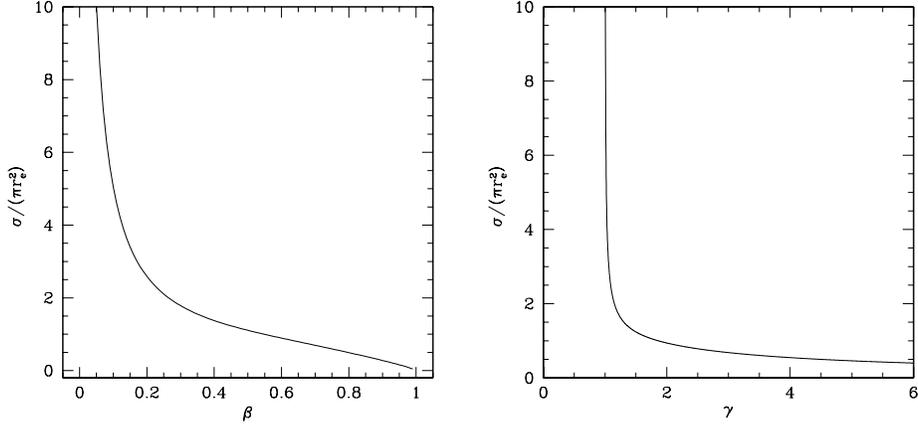


Figura 4.21: Sección eficaz para la aniquilación de pares  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ , en términos de la velocidad o del factor de Lorentz de los electrones en el marco de referencia de momento nulo. La sección eficaz diverge para para electrones lentos,  $\gamma \rightarrow 1$ .

con el factor de dos debido a que el electrón y positrón son distinguibles mientras que los fotones no lo son. La sección eficaz diferencial sigue el mismo patrón que el mostrado en la figura 4.20. La sección eficaz total se expresa frecuentemente en términos de  $\beta$ , la velocidad de los electrones en el centro de momento,

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{4} \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right) \left[ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right]. \quad (4.164)$$

La sección eficaz diverge para  $\gamma \rightarrow 1$ , como puede verse en la figura (4.21), siguiendo  $\sigma \simeq \pi r_e^2 / \beta$ . Este comportamiento favorece la aniquilación de pares con baja velocidad relativa y la formación de una línea de aniquilación delgada a  $mc^2 \simeq 0.511\text{MeV}$ , como fue observada en el centro de la Galaxia por *CGRO-OSSE* en los 1990s.

### Positronio

El espín total de dos electrones con espines paralelos es  $\hbar$ . Dado que un fotón transporta un momento angular  $\hbar$ , no es posible la aniquilación del par en dos fotones. Si los electrones son suficientemente lentos, es posible la formación de un sistema ligado análogo al átomo de hidrógeno, denominado positronio. Las dos partículas tienen misma masa por lo que la masa reducida

del sistema es  $m_e/2$ , y los niveles de energía están a la mitad que los del hidrógeno,  $E_n \simeq -6.8 \text{ eV}/n^2$ . El estado base tiene dos configuraciones: parapositronio ( $s = 0$ ) y ortopositronio ( $s = 1$ ). Los modos respectivos de decaimiento son:

**Parapositronio:**

$$e^-e^+ \rightarrow 2\gamma \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2}{\alpha^5} \frac{\hbar}{mc^2} = 1.23 \times 10^{-10} \text{ s}.$$

**Ortopositronio:**

$$e^-e^+ \rightarrow 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\alpha^6} \frac{\hbar}{mc^2} = 1.4 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

El decaimiento  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  produce tres fotones de energía promedio  $(2/3) \times 0.511 \text{ MeV}$  distribuida en un continuo por debajo de la línea de aniquilación,  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . El *continuo de positronio* ha sido detectado en algunos entornos astrofísicos.

#### 4.7.5. Procesos de un vértice

Reacciones de un vértice, como

$$e^- \rightarrow \gamma e^-, \quad \gamma \rightarrow e^- e^+, \quad e^+ e^- \rightarrow \gamma,$$

no pueden ocurrir en el vacío, al no cumplirse la conservación de energía-momento. Pero ocurren en presencia de campos electromagnéticos que absorben momento y/o energía, y cumplir con las leyes de conservación. Estos procesos se pueden ver como interacción con fotones virtuales representando a un campo electrostático ( $Z$ ) o magnético ( $B$ ), permitiendo la descripción cuántica del proceso. Así podemos describir el comportamiento a altas energías de los siguientes procesos.

#### Bremsstrahlung

Se describe como  $e^- Z \rightarrow e^- Z \gamma$ . El caso ultrarelativista se puede tratar como una colisión cumpliendo con la conservación de energía y momento gracias a la presencia del núcleo, el cual absorbe un momento  $\vec{q}$ , con  $q \ll \gamma$ ,

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{\beta} - \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \omega \\ \gamma_1 \vec{\beta}_1 + \omega \hat{k} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \omega \simeq \frac{\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{q}}{1/2\gamma + \hat{\beta} \cdot \vec{q}}, \quad (4.165)$$

suponiendo  $\hat{k} \simeq \hat{\beta}$ ,  $\gamma \gg 1$ . En el límite  $\gamma \hat{\beta} \cdot \vec{q} \gg 1$  se tiene  $\omega \rightarrow \gamma \beta$ . El fotón y el electrón secundario se mueven dentro de un cono de apertura  $\Delta\theta \sim 1/\gamma$  centrado en la dirección del electrón original.

### Producción de pares cerca de un núcleo atómico

Se describe como  $\gamma Z \rightarrow e^- e^+ Z$ , con la conservación de energía requiriendo  $\omega \simeq \gamma_1 + \gamma_2$ . La sección eficaz está dada por

$$\sigma(\omega) = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left( \log(2\omega) - \frac{109}{42} \right), \quad \omega \gg 1. \quad (4.166)$$

### Sincrotrón

El proceso sincrotrón puede ser descrito como  $e^- B \rightarrow e^- B \gamma$ . El campo magnético absorbe el momento requerido para la emisión, mismo que se escala con la frecuencia de Larmor,  $\omega_\ell \vec{q}$ , con  $|\vec{q}| \sim 1$ . Se obtiene una relación análoga a (4.165), tal que, para  $\omega_\ell \ll 1/\gamma$ , el fotón emitido cumple  $\omega \simeq \gamma^2 \omega_\ell \simeq \omega_c$ , conforme a §4.5.

### Producción de pares en un campo magnético

Es posible la producción de pares en campos magnéticos,  $\gamma B \rightarrow e^- e^+ B$ , en particular si el campo es muy intenso. La conservación de energía-momento

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \hat{k} - \omega_\ell \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \vec{\beta}_1 + \gamma_2 \vec{\beta}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega \omega_\ell \gtrsim 1.$$

En esta relación se puede identificar al campo magnético crítico,

$$\omega \omega_\ell \gtrsim 1 \Rightarrow \hbar \omega \left( \frac{\hbar e B}{mc} \right) \geq m^2 c^4 \Rightarrow \left( \frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) \left( \frac{B}{B_{cr}} \right) \geq 1, \quad (4.167)$$

con  $B_{cr} = m^2 c^3 / e \hbar \simeq 4.4 \times 10^{13}$  Gauss. Campos magnéticos de este orden de magnitud son observados sólo en estrellas de neutrones. En estos entornos la producción magnética de pares es relevante.