

Astrofísica de altas energías

5. Procesos de acreción, hoyos negros y jets

Alberto Carramiñana Alonso
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Tonantzintla, 10 de marzo de 2026

Acreción de materia - intro

- ▶ Los procesos de acreción permiten explicar altas luminosidades con escalas de tiempo pequeñas.
- ▶ Desarrollados para explicar binarias de rayos X y núcleos activos de galaxias.
- ▶ Algunas referencias:
 - Bondi (1952), acreción esféricamente simétrica.
 - Shakura & Sunyaev (1973), acreción en discos α .
 - Pringle (1981), "Accretions discs in astrophysics".
 - Martin Rees (1984), "Black hole models for active galactic nuclei".
 - Frank, King, Raine (1992), "Accretion power in astrophysics", 2ª edición.
 - Philip Armitage (2022), "Lecture notes on accretion disk physics", arXiv 2201.07262.

Acreción de materia - energía

- ▶ Dada una masa $m \rightarrow \dot{M}$ cayendo en el potencial de una masa M , la energía liberada, al alcanzar una distancia R , es,

$$E = \frac{GMm}{R} \Rightarrow L(R) = \frac{GM\dot{M}}{R} \rightarrow L_{ac} = \frac{GM\dot{M}}{R_*}. \quad (1)$$

- ▶ En objetos compactos:

- Acreción en enana blanca \rightarrow variables cataclímicas, novas:

$$M = 0.8 M_\odot, R_* = 10^4 \text{ km}, \dot{M} = 10^{-8} M_\odot/\text{yr} \Rightarrow 10^{35} \text{ erg s}^{-1}.$$

- Acreción en estrella de neutrones u hoyo negro estelar \rightarrow binarias de rayos X:

$$M = 1.4 M_\odot, R_* = 10 \text{ km}, \dot{M} = 10^{-8} M_\odot/\text{yr} \Rightarrow 10^{38} \text{ erg s}^{-1}.$$

- Acreción en hoyo negro supermasivo \rightarrow AGN:

$$M \lesssim 10^9 M_\odot, R_* \gtrsim R_g = GM/c^2, \dot{M} \sim 1 M_\odot/\text{yr} \Rightarrow \eta \dot{M} c^2 \sim 6 \times 10^{46} \text{ erg s}^{-1},$$

con $\eta \sim 0.1 \gg \eta_{nuc}$.

- ▶ La escala de tiempo puede ser de orden $\Delta t \gtrsim R/c$.

Acreción de materia - mecanismos

- ▶ La acreción en escenarios astrofísicos se da frecuentemente en discos:
 - Se requiere un **mecanismo disipativo** → parámetro α → turbulencia, MHD.
 - La mitad (aprox.) de la energía potencial es radiada de manera térmica en el disco.
 - La otra mitad puede dar origen a emisión no térmica (choques), ser absorbida por el hoyo negro central, o expulsada en jets.
- ▶ Los procesos de acreción están acotados, en principio, por la luminosidad de Eddington:
 - balance entre atracción gravitacional (protones) y presión de radiación (electrones),

$$\frac{GMm_p}{r^2} = \frac{L\sigma_T}{4\pi r^2 c} \Rightarrow L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} = 1.26 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right). \quad (2)$$

Acreción de materia - acreción esféricamente simétrica

18 Gas dynamics

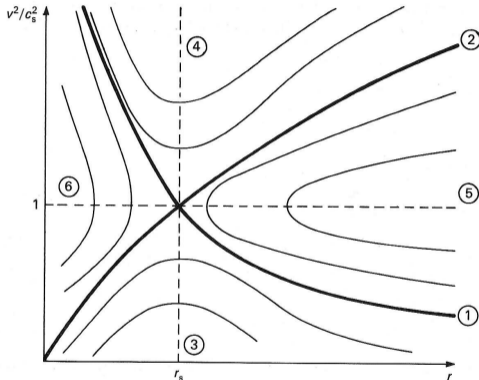


Figure 1. Spherical adiabatic gas flows $v^2(r)/c_s^2(r)$ in the gravitational field of a star. For $v < 0$ these are accretion flows, while for $v > 0$ they are winds or 'breezes'. The two trans-sonic solutions 1, 2 divide the remaining solutions into the families 3–6 described in the text.

- ▶ Proceso inverso al viento estelar con simetría esférica; Bondi & Hoyle (1944) y Bondi (1952).
- ▶ Conservación de masa, gravedad, relación politrópica → seis tipos de soluciones, en términos de la velocidad del flujo (v) comparada con la del sonido (c_s).
- ▶ Solución (1) representa el caso de interés para el estudio de acreción.
 - En condiciones típicas predice tasas bajas de acreción ($\dot{M} \sim 10^{11} \text{ g s}$) → baja luminosidad.

Fig.1, "Accretion Power in Astrophysics".

Acreción de materia - sistemas binarios

- ▶ La transferencia de materia en sistemas estelares binarios está condicionada por las dimensiones del sistema y los procesos de evolución estelar.
- ▶ En binarias interactuantes es común el proceso de desbordamiento del lóbulo de Roche (*Roche lobe overflow*).

- ▶ Equipotenciales de Roche,

$$\Phi(r) = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2.$$

- ▶ Las equipotenciales de Roche definen los cinco puntos de Lagrange.

Roche lobe overflow

49

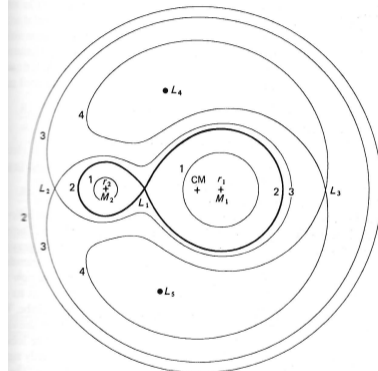


Figure 11. Sections in the orbital plane of the Roche equipotentials $\Phi_R = \text{constant}$, for a binary system with mass ratio $q = M_2/M_1 = 0.25$. Shown are the centre of mass (CM) and Lagrange points L_1-L_5 . The equipotentials are labelled 1-4 in order of increasing Φ_R . Thus the saddle point L_1 (the inner Lagrange point) forms a 'pass' between the two 'Roche lobes', the two parts of the figure-of-eight equipotential 2. The Roche lobes are roughly surfaces of revolution about the line of centres M_1, M_2, L_4 and L_5 (the 'Trojan asteroid' points) are local maxima of Φ_R , but Coriolis forces stabilize synchronous orbits of test bodies at these points.

Fig.11, "Accretion Power in Astrophysics".

Acreción de materia - sistemas binarios

50

Accretion in binary systems

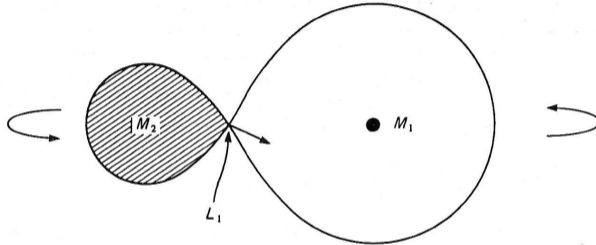


Figure 12. A binary system with the secondary star filling the Roche lobe and transferring mass through L_1 into the lobe of the compact primary.

- ▶ Al llenar su lóbulo de Roche, una estrella transfiere materia a la compañera a través del punto L_1 .
- ▶ El momento angular del flujo de materia, en relación a la compañera, da lugar a la formación del disco de acreción.

Time dependence and stability

97

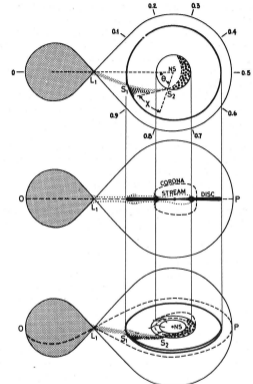


Figure 29. Three different views of a model LMXB in the penetrating gas-stream picture. The situation in the orbital plane with line of sight positions at 0.1 phase intervals is depicted at the top. The mass transfer stream hits the edge of the accretion disc at S_1 , and the ring of radius R_{cor} at S_2 . A two-phase medium of cold clouds and hot intercloud gas forms after impact at S_2 due to ionization instabilities and splashes off the disc plane. The thick dots represent the cold clouds. The central diagram shows a cut through the binary axis normal to the orbital plane (OP). The disc and ring at R_{cor} appear in cross section. The extent of the stream and corona are schematically indicated. The bottom diagram is a perspective view of the model showing the splitting of the stream at S_1 , the ring and the bulge with the cold clouds. (Reproduced from J. Frank, A. R. King & J. P. Lasota (1987) *Astron. Astrophys.*, 178, 137.)

Acreción de materia - discos de acreción

- ▶ En muchos casos se puede despreciar la autogravedad del flujo, el cual adquiere un movimiento Kepleriano alrededor del objeto central,

$$\Omega_K(R) = (GM/R^3)^{1/2}, \quad v_\phi(R) = (GM/R)^{1/2}. \quad (3)$$

- ▶ Gas que gira de forma Kepleriana alrededor del objeto central ha perdido la mitad de la energía, previamente radiada por el disco,

$$L_{disco} = \frac{GM\dot{M}}{2R_\star} = \frac{1}{2}L_{ac}, \quad (4)$$

suponiendo que el disco alcanza el objeto central.

- ▶ Un disco de acreción requiere un mecanismo que disipe de energía, provocando la transferencia de materia hacia la masa central.
 - La disipación local de energía da lugar a emisión térmica.

Discos de acreción - viscosidad por turbulencia

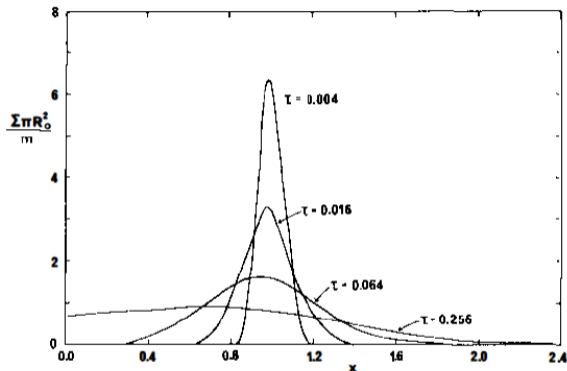


Figure 1 The viscous evolution of a ring of matter of mass m . The surface density Σ is shown as a function of dimensionless radius $x = R/R_0$, where R_0 is the initial radius of the ring, and of dimensionless time $\tau = 12\nu t/R_0^2$ where ν is the viscosity.

Figura 1: Evolución de un anillo infinitamente delgado con rotación Kepleriana, radio R_0 y viscosidad ν . La escala de tiempo es $\tau = R_0^2/12\nu$; la velocidad radial es $v_R \sim -\nu/R$. Figura de Pringle (1981).

- La viscosidad cinemática del gas, $\nu \sim \lambda \bar{v}$, es insuficiente.

Discos de acreción - viscosidad por turbulencia

- ▶ Shakura & Sunyaev (1973) parametrizaron la viscosidad con la escala turbulenta, $\nu = \alpha H c_s$, con H grosor del disco, c_s velocidad del sonido, $\alpha \leq 1$.
 - Los discos α consideran viscosidad turbulenta y rotación Kepleriana.
 - Modelos autoconsistentes: discos físicamente delgados y ópticamente gruesos.
- ▶ Estos modelos se construyen mediante ecuaciones de hidrodinámica:
 - **Continuidad:** tasa de acreción relacionada con la densidad superficial de masa, Σ ,

$$\dot{M} = 2\pi R(-v_R)\Sigma. \quad (5)$$

- **Momento:** disipación viscosa relaciona velocidad radial y coeficiente de viscosidad
 \Rightarrow relación entre viscosidad y tasa de acreción,

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left[1 - \left(\frac{R_\star}{R} \right)^{1/2} \right]^{-1} \Rightarrow \nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_\star}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (6)$$

Discos de acreción - discos α

- **Equilibrio hidrostático:** la rotación Kepleriana supersónica ($v_\phi \gg c_s$) produce un disco geoméricamente delgado ($H \ll R$).

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \simeq -\frac{GMz}{R^3} \Rightarrow \frac{H}{R} = \frac{c_s}{v_\phi}. \quad (7)$$

- **Presión interna:** la presión en el interior del disco incluye presión térmica del gas y de radiación,

$$p = \frac{\rho k T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T^4}{3c}. \quad (8)$$

- **Disipación de energía:** dada por

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_\star}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (9)$$

Discos de acreción - ecuaciones

- **Difusión radiativa:** para un disco ópticamente grueso, el flujo radiativo, F , sigue un proceso de difusión del plano central a la superficie, de acuerdo a,

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_R} \frac{\partial T}{\partial z} \simeq \frac{4\sigma}{3\tau} T(z)^4 \simeq \frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4 = D(R). \quad (10)$$

- **Espesor óptico** del disco: dada κ_R , la opacidad media de Rosseland (caso libre-libre),

$$\tau = H\rho\kappa_R = \Sigma\kappa_R. \quad (11)$$

- **Proceso de opacidad:** puede ser libre-libre (media de Rosseland), o dispersión electrónica,

$$\kappa_R = 6.6 \times 10^{22} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2 \rho T^{7/2}, \quad \kappa_e = \sigma_T/m_p = 0.4 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2. \quad (12)$$

- ▶ Los discos α se construyen recopilando las ecuaciones anteriores. . .

Discos de acreción - las ecuaciones

- ▶ Los discos α se construyen recopilando las ecuaciones. . .

$$\Sigma = \rho H; \quad H/R = c_s/(GM/R)^{1/2}; \quad c_s^2 = P/\rho;$$

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T^4; \quad \nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right];$$

$$\frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4 = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]; \quad \tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c); \quad \nu = \alpha H c_s.$$

- ▶ Las soluciones son $\{\Sigma, H, c_s, P, \rho, \nu, T_c, \tau\}$ en función de (α, M, \dot{M}, R) , escritos como,

$$\dot{M}_{16} = \dot{M}/10^{16} \text{ g s}^{-1}; \quad M_1 = M/M_\odot; \quad R_{10} = R/10^{10} \text{ cm}.$$

Discos de acreción - solución disco α

- Para presión térmica y dispersión libre-libre, en sistemas estelares,

$$\Sigma = 5.2 \text{ g cm}^{-2} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} M_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5},$$

$$H = 1.7 \times 10^8 \text{ cm} \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} M_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5},$$

$$\rho = 3.1 \times 10^{-8} \text{ g cm}^{-3} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} M_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5},$$

$$T_c = 1.4 \times 10^4 \text{ K} \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} M_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5},$$

$$\tau = 33 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5},$$

$$\nu = 1.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-2} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} M_1^{-1/4} R_{10}^{3/4} f^{6/5},$$

$$v_R = 2.7 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} M_1^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5},$$

con

$$f = \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{1/4}.$$

Discos de acreción - solución disco α

- Para presión térmica y dispersión libre-libre, en un núcleo activo,

$$\Sigma = 5.2 \times 10^6 \text{ g cm}^{-2} \alpha^{4/5} \dot{M}_{26}^{7/10} M_8^{1/4} R_{14}^{-3/4} f^{14/5},$$

$$H = 1.7 \times 10^{11} \text{ cm} \alpha^{-1/10} \dot{M}_{26}^{3/20} M_8^{-3/8} R_{14}^{9/8} f^{3/5},$$

$$\rho = 3.1 \times 10^{-5} \text{ g cm}^{-3} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{26}^{11/20} M_8^{5/8} R_{14}^{-15/8} f^{11/5},$$

$$T_c = 1.4 \times 10^6 \text{ K} \alpha^{-1/5} \dot{M}_{26}^{3/10} M_8^{1/4} R_{14}^{-3/4} f^{6/5},$$

$$\tau = 3.3 \times 10^3 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{26}^{1/5} f^{4/5},$$

$$\nu = 1.8 \times 10^{18} \text{ g cm}^{-2} \alpha^{4/5} \dot{M}_{26}^{3/10} M_8^{-1/4} R_{14}^{3/4} f^{6/5},$$

$$v_R = 2.7 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1} \alpha^{4/5} \dot{M}_{26}^{3/10} M_8^{-1/4} R_{14}^{-1/4} f^{-14/5},$$

con

$$f = \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{1/4}.$$

Discos de acreción - solución

- ▶ Ecuaciones... \Rightarrow solución: $\{\Sigma, H, \rho, T_C, \tau, \nu, \nu_R\}$.
- ▶ Se distinguen tres regímenes, dependiendo (1) del proceso dominante de opacidad, libre-libre o dispersión electrónica; (2) de la presión interna del disco, dominada por presión térmica del gas o por radiación:
 - externa: presión de gas; opacidad libre-libre;
 - intermedia: presión de gas; opacidad por dispersión de Thomson;
 - interna: presión de radiación; dispersión de Thomson. Esta región es inestable y el disco deja de ser delgado.

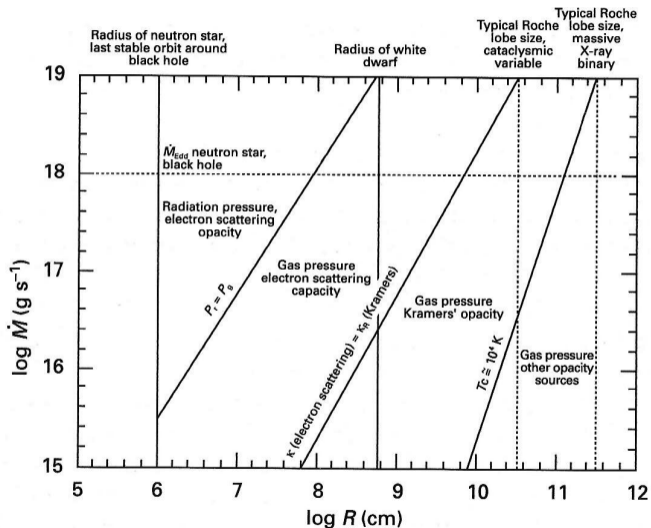


Figure 22. Physical regimes in steady α -discs around compact objects.

Discos de acreción - espectro

- ▶ El espectro de un disco delgado es la superposición de anillos emitiendo como cuerpo negro,

$$D(R) = \sigma T(R)^4, \quad T(R) = T_\star \left(\frac{R}{R_\star} \right)^{-3/4}. \quad (13)$$

- ▶ Empleando $R_6 = R_\star/10^6$ cm, para una estrella de neutrones, $R_\star = 10$ km,

$$T_\star = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma_T R_\star^3} \right)^{1/4} = 1.3 \times 10^7 \text{ K } \dot{M}_{17}^{1/4} M_1^{1/4} R_6^{-3/4}, \quad (14)$$

es decir $kT_\star \simeq 1.1$ keV. El espectro alcanza los rayos X duros.

- ▶ Para un núcleo activo,

$$T_\star = 2.2 \times 10^5 \text{ K } \dot{M}_{26}^{1/4} M_8^{1/4} R_{14}^{-3/4}, \quad (15)$$

es decir $kT_\star \simeq 20$ eV. El espectro alcanza rayos X blandos.

Discos de acreción - espectro

The emitted spectrum

79

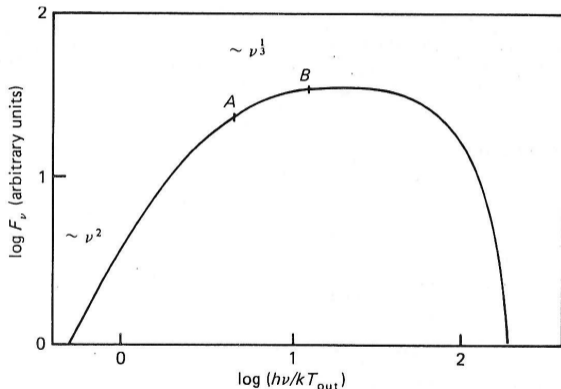


Figure 20. The continuum spectrum F_ν of a steady optically thick accretion disc radiating locally as a black body. Here the outer radius $R_{\text{out}} = 250R_*$, and $T_{\text{out}} = T(R_{\text{out}})$. Points A and B have 'spectral index' $d(\ln F_\nu)/d(\ln \nu)$ equal to 0.38 and 0.28 respectively, showing the relative shortness of the ' $\nu^{1/3}$ ' section of the continuum.

Acreción en hoyos negros

- ▶ De acuerdo al review clásico de Rees (1984), en el caso de un hoyo negro supermasivo,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow L = \eta \dot{M} c^2 = 6 \times 10^{46} \text{ erg s}^{-1} \eta \left(\frac{\dot{M}}{M_\odot \text{ yr}^{-1}} \right) \eta, \quad r_s/c = 10^4 \text{ s } M_9.$$

- ▶ Un límite teórico a la acreción es la luminosidad de Eddington; en simetría esférica,

$$L_E = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \simeq 1.3 \times 10^{47} \text{ erg/s } M_9.$$

- ▶ Tasa de acreción crítica, para un hoyo negro, usando $R = 2GM/c^2$,

$$\dot{M}_c = 4.4 M_\odot/\text{yr } M_9.$$

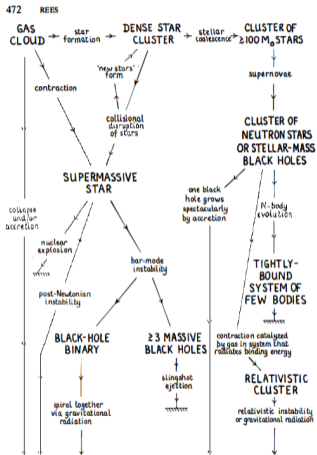
- ▶ Tiempo característico,

$$t_E = Mc^2/L_E = \frac{\sigma_T c}{4\pi Gm_p} \simeq 4 \times 10^8 \text{ yr.}$$

Hoyos negros

- ▶ Estelares y supermasivos, . . . de Schwarzschild. . . de Kerr. . .
- ▶ Relatividad: algunas referencias:
 - “El origen y desarrollo de la relatividad”, José Manuel Sánchez Ron, 1983.
 - “Black holes & time warps”, Kip Thorne, 1994.
 - Relatividad especial: Jackson, Rybicki & Lightman, Shu, etc...
 - “Gravitation and cosmology: principles and applications”, Stephen Weinberg, 1972.
 - “Spacetime and geometry”, Sean Carroll, 2004.

Hoyos negros



massive black hole

Figure 1 Schematic diagram [reproduced from Rees (106)] showing possible routes for runaway evolution in active galactic nuclei.

exponential growth of black holes

$$M_{\text{BH}}(t_Q) = M_{\text{seed}} \cdot \exp\left(\frac{t_Q}{t_S}\right)$$

quasar lifetime (points to t_Q)
mass of initial black hole seed (points to M_{seed})

Salpeter "e-folding" time: bolometric luminosity (points to L)

$$t_S = 4.5 \times 10^7 \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right) \left(\frac{L}{L_{\text{Edd}}}\right) \text{ yr}$$

radiative efficiency of the accretion (points to ϵ)

Relatividad - postulados de relatividad especial

- ▶ La relatividad especial se basa en dos postulados:
 1. Las leyes de la física tienen misma forma en todo marco de referencia inercial.
 2. La velocidad de la luz es constante e independiente del marco de referencia;
 $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ *exactamente*.
- ▶ Definiendo un **evento** por sus cuatro coordenadas x^α , con índices $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad \Rightarrow \quad x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix},$$

los dos postulados conducen a la definición del intervalo entre eventos,

$$ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (16)$$

y su invariancia ante transformaciones de coordenadas.

Relatividad especial - transformaciones de Lorentz

- ▶ Las transformaciones de coordenadas que preservan la forma del intervalo,

$$ds' = ds,$$

son las transformaciones de Lorentz: translaciones y rotaciones de coordenadas; inversiones espaciales y temporales; desplazamientos a velocidad constante *boosts*,

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (17)$$

- La luz y demás formas de radiación electromagnética cumplen $ds^2 = 0$.
- Eventos conectados causalmente cumplen $ds^2 \leq 0$.

Relatividad especial - tensor de Minkowski

- ▶ El intervalo puede expresarse como,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (18)$$

al definir el **tensor de Minkowski**,

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1), \quad (19)$$

junto con la **convención de sumatorias implícitas**.

- ▶ Las leyes de la física se enuncian para todo marco de referencia inercial (primer postulado), expresadas convenientemente mediante (cuadri)vectores y tensores.

Relatividad especial - vectores, tensores

- ▶ La relatividad maneja vectores descritos con cuatro componentes, mediante un índice $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, y tensores descritos con varios índices (dos o más).
- ▶ El espacio de vectores es un **espacio dual**, con vectores **covariantes** (A_α) y **contravariantes** (A^α) asociados entre sí.
 - Dada una transformación de coordenadas, $\partial x'^\alpha / \partial x^\beta$, vectores **contravariantes**, A^α , y **covariantes**, A_α , se transforman de acuerdo a,

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta, \quad A'_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} A_\beta. \quad (20)$$

- Los dos tipos de vectores se relacionan a través del tensor de Minkowski,

$$A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (21)$$

- ▶ Se define el producto escalar entre vectores,

$$A_\alpha B^\alpha = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3,$$

y, de ahí, la norma de un cuadrivector, $A_\alpha A^\alpha$.

Relatividad especial - vectores, tensores

- ▶ El concepto de vector se generaliza al de tensor:
 - un escalar es un tensor de rango 0. La norma de un 4-vector es un escalar.
 - un vector es un tensor de rango 1, y se transforma de acuerdo a las reglas (20).
 - un tensor de rango 2 se representa con una matriz de 4×4 . Si es contravariante se transforman de acuerdo a,

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F'^{\gamma\delta}, \quad (22)$$

covariantes ($F_{\alpha\beta}$) y mixtos (F^{α}_{β} , F_{α}^{β}), de acuerdo a las reglas de transformación respectivas.

Relatividad especial - leyes de la física; mecánica

- ▶ Las leyes de la física se enuncian definiendo el **tiempo propio**,

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2}. \quad (23)$$

- ▶ El **movimiento inercial** sigue de definir 4-velocidad y 4-aceleración,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau}. \quad (24)$$

- Un movimiento inercial cumple $a^\alpha = 0 \Rightarrow u^\alpha$ constante.
- ▶ Al definir el 4-vector de energía-momento, que satisface la relación de invariancia,

$$p^\alpha = mu^\alpha \quad \Rightarrow \quad p^\alpha p_\alpha = -E^2/c^2 + p^2 = -m^2 c^2, \quad (25)$$

se pueden generalizar las ecuaciones de movimiento, definiendo la 4-fuerza,

$$\mathcal{F}^\alpha \equiv \frac{dp^\alpha}{d\tau}. \quad (26)$$

Relatividad especial - leyes de la física; electrodinámica

- ▶ El operador de derivación parcial, generalizado covariante,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (27)$$

permite enunciar principios de conservación, como el de la carga eléctrica,

$$j^\alpha = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (28)$$

- ▶ El tensor (antisimétrico) de campo electromagnético se define combinando el operador ∂_α con el 4-vector que combina los potenciales escalar y vectorial,

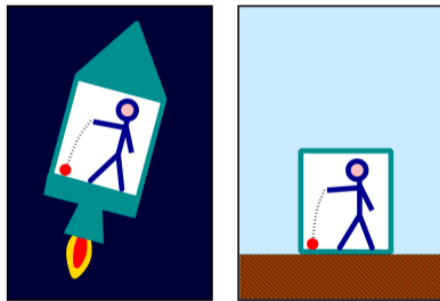
$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (29)$$

- ▶ De donde, las ecuaciones de Maxwell, escritas en forma covariante,

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad \partial^\gamma F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} = F^{[\alpha\beta,\gamma]} = 0. \quad (30)$$

El principio de equivalencia

- ▶ El **principio de equivalencia (EP)** permite describir la gravedad: la proporcionalidad entre **masa inercial** y **masa gravitacional** indica la equivalencia (local) entre un campo gravitacional y un marco de referencia acelerado.
- **Weak EP**: las masas inercial y gravitacional son proporcionales \Rightarrow el movimiento de una masa en caída libre se describe de misma forma en un campo gravitacional que en un marco de referencia acelerado.
- **Einstein EP**: en regiones pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducen a la relatividad especial. No es posible distinguir **localmente** entre un campo gravitacional y una aceleración.



Markus Pössel @ wikipedia

- ▶ El EP permite definir marcos de referencia localmente inerciales \Rightarrow en caída libre.

El principio de equivalencia

- ▶ El **corrimiento al rojo gravitacional** se infiere del principio de equivalencia,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{gh}{c} \longrightarrow \frac{\Delta\Phi}{c^2}, \quad (31)$$

con $\Delta\Phi$ el cambio en el potencial gravitacional.

- ▶ Se generaliza el tensor de Minkowski al tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, función de las coordenadas x_α , de forma que la medición de intervalos es local,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (32)$$

- En campos gravitacionales *pequeños*, se puede aproximar,

$$g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

- En el límite de un potencial gravitacional Newtoniano, ϕ ,

$$h_{00} \simeq -2\phi/c^2 \rightarrow 2GM/r c^2.$$

2.3 As you fall toward Earth, tidal gravitational forces stretch you from head to foot and squeeze you from the sides.

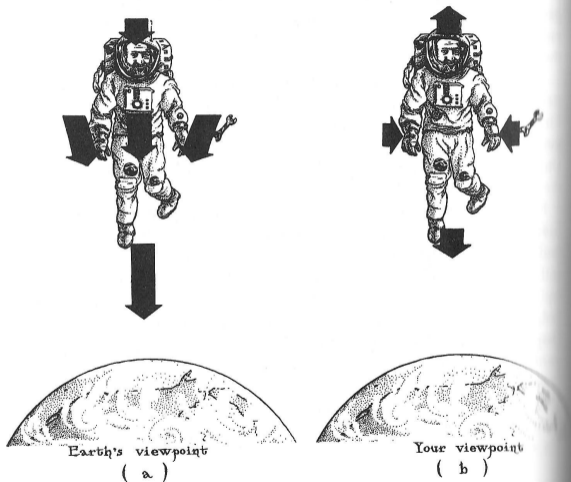


Figura 2: Izquierda: el personaje cae hacia la Tierra bajo la influencia de la gravedad. Derecha: él, en un marco de referencia en caída libre, localmente inercial, experimenta fuerzas de marea, expresadas con un estiramiento en la dirección de caída y una compresión perpendicular. Figura de "Black holes & time warps", Kip Thorne, 1994.

Espacios curvos - trayectorias geodésicas

- ▶ Los marcos de referencia localmente inerciales requieren extender la relatividad a espacios curvos.
- ▶ Dada una métrica $g_{\mu\nu}$, una partícula de prueba en un campo gravitacional sigue una trayectoria **geodésica** $x^\mu(\lambda)$, determinada por el principio de mínima acción,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (33)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son combinaciones de primeras derivadas del tensor métrico,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (34)$$

Espacios curvos - curvatura; tensor de curvatura

- ▶ Para describir la curvatura del espacio se requiere definir el tensor de Riemann, el cual define las propiedades del espacio-tiempo,

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (35)$$

De las 256 componentes del tensor, 20 son independientes.

- ▶ El tensor de Riemann, o tensor de curvatura, se contrae en el tensor de Ricci (y también en el tensor de Weyl, que aquí ya no viene al caso...),

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}, \quad (36)$$

que, a su vez, se contrae al escalar de Ricci,

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (37)$$

- La curvatura, junto con **la distribución de energía-momento**, permite enunciar la ecuación de Einstein.

Ecuación de Einstein - la ecuación

- ▶ La distribución de materia y energía se describe con el tensor de energía-momento,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (38)$$

siendo ρ la densidad y p la presión (unidades $c = 1$).

- La conservación de energía ($\nu = 0$) y momento (1, 2, 3) se expresa como,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

- ▶ La métrica se calcula con la ecuación de Einstein, (aquí sin constante cosmológica),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (39)$$

- En el límite Newtoniano, la ecuación (39) tiende a la de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho.$$

Ecuación de Einstein - la métrica de Schwarzschild

- Solución a la ecuación de Einstein en el vacío con simetría esférica, $R_{\mu\nu} = 0$. Comunicada a Einstein por Schwarzschild en diciembre de 1915:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (40)$$

con $r_s = 2GM/c^2$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

- Para estudiar trayectorias se requieren los símbolos de Christoffel. Los no nulos son ($c = 1$),

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{GM}{r(r-2GM)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = -(r-2GM),$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{GM}{r^3}(r-2GM), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{-GM}{r(r-2GM)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -(r-2GM), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -(r-2GM)\sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Métrica de Schwarzschild - ecuaciones geodésicas

- Las cuatro ecuaciones geodésicas (33) son ($c = 1, GM = 1$),

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2}{r(r-2)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{r-2}{r^3} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{r(r-2)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - (r-2) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (47)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (48)$$

- Estas ecuaciones permiten plantear $\theta = \pi/2 \dots$

Métrica de Schwarzschild - ecuaciones geodésicas

- Para $\theta = \pi/2$, ec. (47) $\Rightarrow 0 = 0$; ecs. (45,48) expresan conservación de $\{E, L\}$,

$$\frac{d^2 t / d\lambda^2}{dt/d\lambda} = -\frac{2}{r(r-2)} \frac{dr}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad E = \left(1 - \frac{2}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda},$$

$$\frac{d^2 \phi / d\lambda^2}{d\phi/d\lambda} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

- La definición de la métrica proporciona una condición adicional,

$$-\varepsilon = -\left(1 - \frac{2}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2,$$

con $\varepsilon = 0$ para fotones.

- De esta expresión,

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \varepsilon\right) = 0.$$

Métrica de Schwarzschild - órbitas circulares

- ▶ De las leyes de conservación se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \mathcal{E}, \quad (51)$$

donde $\mathcal{E} = E^2/2$, y el potencial efectivo, con el término relativista a la derecha,

$$V(r) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3}. \quad (52)$$

- ▶ Las órbitas circulares se obtienen de $dV/dr = 0$, de donde,

$$\varepsilon r_c^2 - L^2 r_c + 3L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_c = \frac{L^2}{2\varepsilon} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12\varepsilon}{L^2}} \right\}.$$

Métrica de Schwarzschild - órbitas circulares

- ▶ Las órbitas circulares, r_c , de $dV/dr = 0$, con $\epsilon = 1$,

$$r_c = \frac{L^2}{2GM} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{GM}{L} \right)^2} \right\}. \quad (55)$$

La externa (+) es estable; la interna (-) inestable.

- ▶ Se juntan en

$$L = \sqrt{12} GM \Rightarrow r_c = 6GM = 3r_s, \quad (56)$$

definiendo la última órbita estable.

- ▶ La energía de ligadura de una masa m a una distancia r es,

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{r - r_s}{\sqrt{r^2 - 3rr_s/2}} \right], \quad (57)$$

con máximo en $r = 3r_s \Rightarrow E \simeq 0.057mc^2$.

Schwarzschild - órbitas

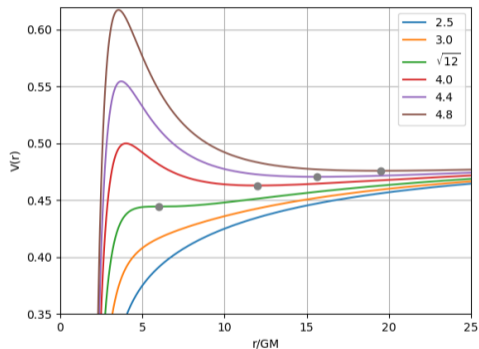
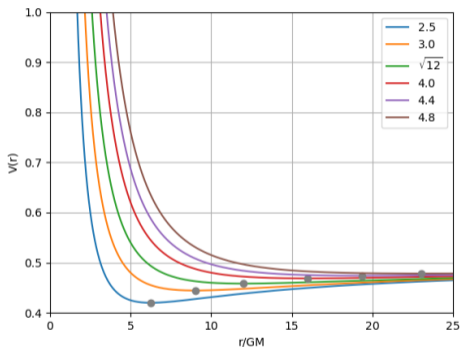


Figura 3: Órbitas newtonianas (izquierda) y de Schwarzschild (derecha), para distintos valores de momento angular, L/GM , en el recuadro. Los puntos grises marcan los radios de órbitas circulares con mínimo potencial.

Hoyos negros en rotación - métrica de Kerr

- ▶ Hoyos negros en rotación se representan con la métrica de Kerr (1963).
- ▶ El momento angular se parametriza con el momento angular por unidad de masa ℓ , tal que $0 \leq \ell < m$:
- ▶ Las órbitas estables son más cercanas: si la materia co-rota con el hoyo, la última órbita estable tiende a $r_s/2$ para $\ell \rightarrow 1$, \Rightarrow la fracción de energía extraíble a $\eta \rightarrow 1 - 1/\sqrt{3} \simeq 0.42$.
- ▶ La métrica de Kerr tiene una "ergósfera": $r_+ = m + \sqrt{m^2 - \ell^2 \cos^2 \theta}$.
- ▶ Es posible la extracción de energía del hoyo negro entrando en la ergósfera y saliendo de ella (Penrose 1969; Blandford & Znajek 1977).

Hoyos negros en rotación - métrica de Kerr

- ▶ ds^2 expresada por ec. (6.70) de Carroll. . .
- ▶ La métrica se expresa en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ,

$$x = (r^2 + \ell^2)^{1/2} \sin \theta \cos \phi, \quad y = (r^2 + \ell^2)^{1/2} \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (58)$$

indefinidas dentro de un círculo de radio ℓ , singularidad de la solución.

- ▶ Los **dos** horizontes de eventos, definidos por $g^{rr} = 0$, ocurren en

$$r^2 - 2GMr + \ell^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \ell^2}.$$

Hoyos negros en rotación - métrica de Kerr

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) \\ + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\phi^2,$$

(6.70)

where

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2$$

(6.71)

and

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

(6.72)

Hoyos negros en rotación - métrica de Kerr

Chapter 6 More General Black Holes

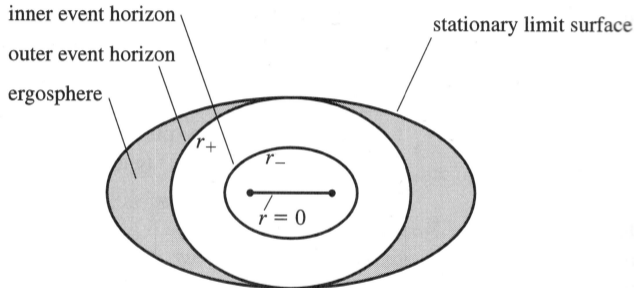
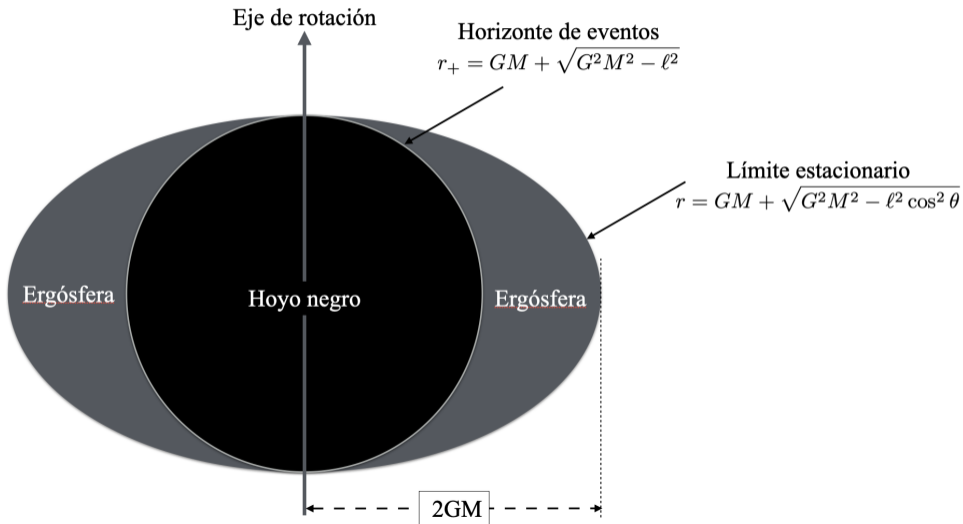


FIGURE 6.7 Horizon structure around the Kerr solution (side view). The event horizons are null surfaces that demarcate points past which it becomes impossible to return to a certain region of space. The stationary limit surface, in contrast, is timelike except where it is tangent to the event horizon (at the poles); it represents the place past which it is impossible to be a stationary observer. The ergosphere between the stationary limit surface and the outer event horizon is a region in which it is possible to enter and leave again, but not to remain stationary.

Hoyos negros - métrica de Kerr



Hoyos negros en rotación - mecanismo de Penrose

But, if we imagine that you are arbitrarily strong (and accurate), you can arrange your throw such that $E^{(2)} < 0$, as per (6.96). Furthermore, Penrose was able to show that you can arrange the initial trajectory and the throw as shown in Figure 6.9, such that afterward you follow a geodesic trajectory back outside the stationary limit surface into the external universe. Since your energy is conserved

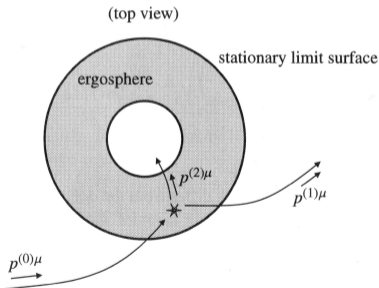


FIGURE 6.9 The Penrose process (top view). An object falls toward a Kerr black hole and splits in two while in the ergosphere (within the stationary limit surface, but outside the outer event horizon). One piece falls into the horizon with a negative energy $E^{(2)}$, while the other escapes to infinity with a larger energy than that of the original infalling object.

El proceso de Penrose (1971) permite extraer energía rotacional de un hoyo negro de Kerr, entrando y saliendo en la ergósfera.

Hoyos negros en rotación - mecanismo de Penrose

- ▶ El mecanismo de Blandford-Znajek (1977) se deriva del proceso de Penrose para extraer energía de un hoyo negro en rotación.
- ▶ Dentro de la ergósfera el espacio-tiempo co-rota con el hoyo negro (efecto Lense-Thirring).
- ▶ Líneas de algún campo magnético externo se enredan, permitiendo a materia dentro de la ergósfera salir en dirección axial, extrayendo energía del hoyo negro.
- ▶ De manera análoga a un pulsar, la rotación del campo magnético induce un campo electrostático que puede, en principio, acelerar partículas a muy altas energías.
 - La presencia de cargas tiende a cancelar este campo, pero si la cancelación no es perfecta se mantiene la aceleración de partículas.

Hoyos negros: Kerr

1977MNRAS...179...433B

Extraction of energy from Kerr black holes

445

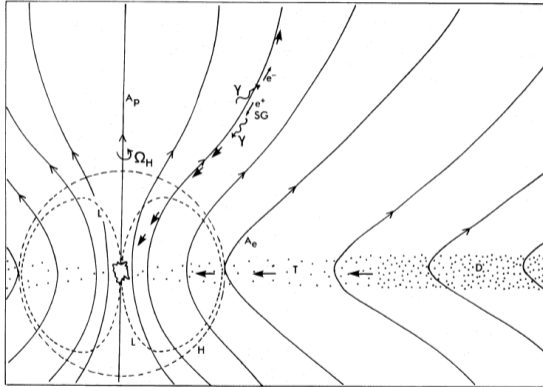


Figure 1. Schematic cross-section of black hole and magnetosphere, using r and θ coordinates in normal way. (Due to axial and time symmetry the diagram is independent of the azimuthal and time coordinates that are being held constant; these can be the Kerr coordinates v and ϕ , or for $r > r_+$ the Boyer–Lindquist coordinates t and ϕ .) The poloidal field has been chosen so that $\Omega_H \cdot \mathbf{B} > 0$. H is the event horizon $r = r_+$. The poloidal field surfaces (i.e. surfaces of constant A_ϕ) are shown as solid lines, with the polar and equatorial surfaces $A_\phi = A_p$ and $A_\phi = A_e$ specifically labelled. A current I is flowing from the magnetosphere into the hole, and back out of the hole into the disc D lying in the $\theta = \pi/2$ plane (denoted by heavy stippling). Particles can only cross the event horizon one way, into the hole. In the