Procesos radiativos
Capítulo 2: Transferencia radiativa

Alberto Carramiñana
INAOE

Tonantzintla, 8 de septiembre de 2022

Transferencia radiativa

Introducción

Los procesos de interacción entre radiación electromagnética y materia se describen formalmente a través de la *ecuación de transferencia radiativa*. Este formalismo emplea como cantidad básica la intensidad de la radiación, que se relaciona con cantidades medibles como el flujo de energía. La intensidad del campo radiativo es afectada por los procesos de absorción, emisión y dispersión. Este formalismo se describe a continuación.

2.1. Definiciones

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

- La intensidad específica, I_ν, describe el transporte de energía raditiva, definiendo físicamente un haz de radiación. La intensidad se define del flujo de energía ($\mathcal{E}$) por unidad de tiempo (t), área (A), frecuencia (ν) y ángulo sólido (Ω),

$$\frac{d\mathcal{E}}{dA\ dt} = I_\nu(\hat{k}, \vec{r}, t)\ \hat{k} \cdot \hat{n}\ d\Omega\ d\nu\,, \tag{1}$$

  con $\hat{n}$ la normal al área dA que atraviesa el haz, con vector de propagación $\hat{k}$.
- I_ν es función de la posición, el tiempo, la frecuencia y el vector de propagación[1]; contiene la distribución espacial, angular y espectral del campo de radiación.
- Unidades (cgs) I_ν: [erg cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}Sr^{-1}]. Se define en términos de frecuencia, ν, o longitud de onda, λ, con

$$I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu \quad \Rightarrow \quad I_\lambda = -\frac{c}{\lambda^2}\, I_\nu, \tag{2}$$

[1] La combinación $(\hat{k}, \nu)$ corresponde con el vector $\vec{k} = (2\pi\nu/c)\hat{k}$. El vector de propagación, $\hat{k} = \hat{z}\cos\theta + (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\sin\theta$ se relaciona directamente con el ángulo sólido, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

Conservación de energía radiativa $\Rightarrow$ constancia de I_ν sobre un haz.

- Dados un emisor situado en el punto (1) y un receptor en el punto (2), la energía que sale de (1) y llega a (2) está dada por,

$$d\mathcal{E}_1 = I_{\nu 1}\, dA_1\, d\Omega_1\, dt\, d\nu\,,$$

donde $d\Omega_1$ es el ángulo sólido que abarca el receptor (2) visto desde el emisor (1).

- La energía recibida en (2) está dada recíprocamente por

$$d\mathcal{E}_2 = I_{\nu 2}\, dA_2\, d\Omega_2\, dt\, d\nu\,.$$

- Conservación de energía $\Leftrightarrow$ $d\mathcal{E}_1 = d\mathcal{E}_2$: la energía emitida dentro de $d\Omega_1$ coincide con la captada en dA_2 y la recibida dentro de $d\Omega_2$ coincide con la emitida en dA_1.
- En virtud de que $dA_1\, d\Omega_1 = dA_2\, d\Omega_2$ (figura 1), tenemos

$$I_{\nu 1} = I_{\nu 2}\,. \qquad (3)$$

En ausencia de absorción o emisión, I_ν es constante a lo largo del haz.

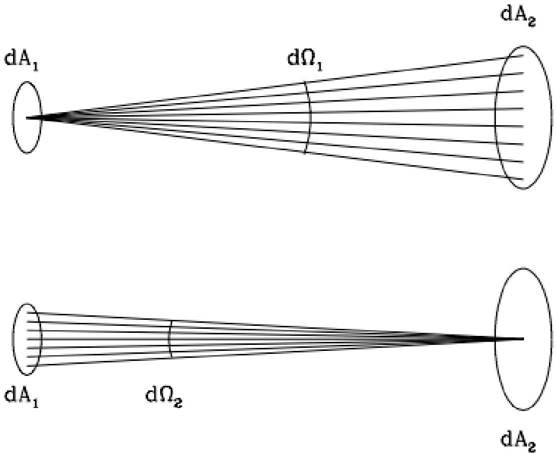

Figura: Todos los haces de radiación que salen de (1) con una apertura dada por el ángulo sólido $d\Omega_1$ atraviesan la diferencial de área $dA_2 = r^2 d\Omega_1$, siendo r la distancia entre ambos puntos. De misma manera, aquellos que pasan por el punto (2) habiendo salido de (1) abarcan un ángulo sólido $d\Omega_2 = dA_1/r^2$. Se desprende que $dA_1 d\Omega_1 = dA_2 d\Omega_2$.

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

Los momentos geométricos de I_ν definen cantidades físicas.

- **Intensidad media y densidad de energía**

- La *intensidad media*, J_ν, es el promedio de la intensidad sobre todas direcciones:

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \, d\Omega \,, \tag{4}$$

unidades [erg cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}].

- La intensidad media tiene la misma forma funcional que la *densidad de energía*, u_ν, definida también integrando la intensidad sobre el ángulo sólido,

$$u_\nu \equiv \frac{1}{c}\int I_\nu \, d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \,, \tag{5}$$

donde el factor c indica el paso de flujo a densidad.

- La densidad de energía representa la energía por unidad de volumen y de rango espectral en forma de radiación. Unidades: [erg cm^{-3}Hz^{-1}].

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

- Flujo de energía

- El flujo de energía, medido observacionalmente, corresponde al primer momento de la distribución angular de la intensidad,

$$F_\nu \equiv \int I_\nu \ \cos\theta \ d\Omega \,, \tag{6}$$

  Unidades: [erg cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}].
- F_ν describe la energía transportada por área, tiempo e intervalo espectral. El término en coseno corresponde a $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos\theta$, con $\hat{k}$ vector de propagación de la radiación y $\hat{n}$ normal al elemento de área (emisor o receptor).
- Para fuentes distantes con flujo F_ν, la intensidad media está dada por $\langle I_\nu \rangle = F_\nu / \Delta\Omega$, con $\cos\theta = 1$.
- El flujo de energía es cero para un campo de radiación isotrópico.

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

- Flujo de energía (2)

- Se definen componentes de incidencia paralela y anti-paralela a una superficie, aquí normal al eje $\hat{z}$. En coordenadas esféricas,

$$F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta \, d\varphi \,, \quad F_\nu^- = \int_0^{2\pi} \int_\pi^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta \, d\varphi \,, \quad (7)$$

  de manera que $F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-$.
- Se distingue el flujo emitido, $F_{\nu 1}$, del recibido, $F_{\nu 2}$: cuando la intensidad se conserva, estos se relacionan aproximadamente como $I_\nu \simeq F_{\nu 1}/\Delta\Omega_1 = F_{\nu 2}/\Delta\Omega_2$, con $\Delta\Omega_1$ ángulo sólido dentro del cual se da la emisión, y $\Delta\Omega_2$ ángulo sólido que abarca la fuente vista por el observador.
- $F_{\nu,obs} = F_{\nu,em}\,(\Delta\Omega_{obs}/\Delta\Omega_{em})$. Generalmente $\Delta\Omega_{em} \ll \Delta\Omega_{obs} \Rightarrow F_{\nu,em} \gg F_{\nu,obs}$.
- Fuente isotrópica $\Rightarrow \Delta\Omega_{em} = \pi$, mientras que $\Delta\Omega_{obs} = \pi\delta\theta^2$, con $\delta\theta$ radio angular de la fuente según el observador.
- El Sol, $F_{obs} \rightarrow$ *constante solar*, $s_\odot \simeq 1367\,\mathrm{W/m^2}$, $F_{em} \simeq 6.285 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2}$.

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

- Flujo de energía (3)

- Una forma común de describir el flujo, especialmente en el óptico y bandas aledañas, es el sistema de *magnitudes*, definido de forma logarítmica,

$$m_\nu = -2.5 \log(F_\nu / F_{\nu 0}),$$

  con $F_{\nu 0}$ un flujo de referencia para la frecuencia ν. Los flujos de referencia $F_{\nu 0}$ aparecen en la tabla 1.1 del primer capítulo.
- El sistema de magnitudes se definió originalmente con la estrella Vega teniendo magnitud cero en las distintas bandas fotométricas.
- En radio-astronomía es más común el uso del Jansky, unidad lineal definida como,

$$1\,\mathrm{Jy} \equiv 10^{-23}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}}.$$

- De interés en astronomía es el brillo del cielo, expresado comúnmente en magnitudes por segundo de arco cuadrado, que viene siendo la intensidad específica de la emisión del cielo.

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

- Presión de radiación

- La *presión de radiación* corresponde al segundo momento de la intensidad,

$$P_\nu \equiv \frac{1}{c} \int I_\nu \ \cos^2\theta \ d\Omega \ , \tag{8}$$

Unidades: [$\mathrm{dyn\,cm^{-2}Hz^{-1}}$], equivalentes a densidad de energía [$\mathrm{erg\,cm^{-3}Hz^{-1}}$].

- La intensidad específica y sus momentos caracterizan las componentes espectrales de un haz de radiación. Pueden ser integradas sobre frecuencia o longitud de onda,

$$I = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu \, , \quad u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu \, , \quad F = \int_0^\infty F_\nu \, d\nu \, , \quad \ldots \tag{9}$$

para obtener las cantidades globales.

2.1.2. Relación con ondas electromagnéticas

En el capítulo 1 se definieron el flujo y la densidad de energía de un campo electromagnético,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}|^2\hat{k}\,, \quad u = \frac{|\vec{E}|^2}{4\pi}\,, \tag{10}$$

con $\vec{S}$ el vector de Poynting. A partir del flujo de energía se tiene,

$$\mathcal{E} = \int \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA\,dt = \int \frac{c}{4\pi}|\vec{E}|^2\,\hat{k}\cdot\hat{n}\,dA\,dt = \int I_\nu\,\hat{k}\cdot\hat{n}\,dA\,dt\,d\nu\,d\Omega\,. \tag{11}$$

Se puede ir formalmente de la dependencia temporal de los campos a su descripción espectral a través de la transformada de Fourier.
La dependencia de $\vec{S}$ con los campos es cuadrática, de donde se desprende que la definición se refiere al flujo por unidad de tiempo o por unidad de frecuencia,

$$\vec{S}(t) \longrightarrow \mathrm{erg\ cm^{-2}s^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{S}(\omega) \longrightarrow \mathrm{erg\ cm^{-2}Hz^{-1}}\,.$$

2.1.2. Relación con ondas electromagnéticas

Para poder definir un flujo *por unidad de tiempo y de frecuencia* es necesario considerar formalmente intervalos espectrales y temporales que satisfagan $\Delta\omega\Delta t \gg 1$. Siendo así, podemos considerar el flujo por unidad de frecuencia promediado por cada ciclo,

$$\vec{S}_\omega = (\omega/2\pi)\left\langle \vec{S}(\omega)\right\rangle \longrightarrow \mathrm{erg\ cm^{-2}\ Hz^{-1}\ s^{-1}} . \tag{12}$$

Un campo de radiación incorporará un conjunto de ondas electromagnéticas propagándose en todas direcciones,

$$\vec{S}_\omega(\vec{r}) = \sum_{\hat{k}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left(\frac{c}{4\pi}\right)|\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2\ \hat{k} , \tag{13}$$

siendo $\vec{E}(\vec{r},\omega)$ una componente de Fourier del campo eléctrico de radiación y $\hat{k}$ el vector de propagación del mismo. La intensidad específica I_ω considera la distribución angular de $\vec{S}_\omega$, de manera que podemos identificarla con

$$I_\omega(\vec{r},\hat{k}) = \left(\frac{\omega c}{8\pi^2}\right)\frac{d}{d\Omega}\left\{|E(\vec{r},\omega)|^2\right\} . \tag{14}$$

2.1.2. Relación con ondas electromagnéticas

El cálculo de la intensidad, la densidad de energía, el flujo y la presión de radiación requieren la consideración de la geometría del mismo (fig. 2).

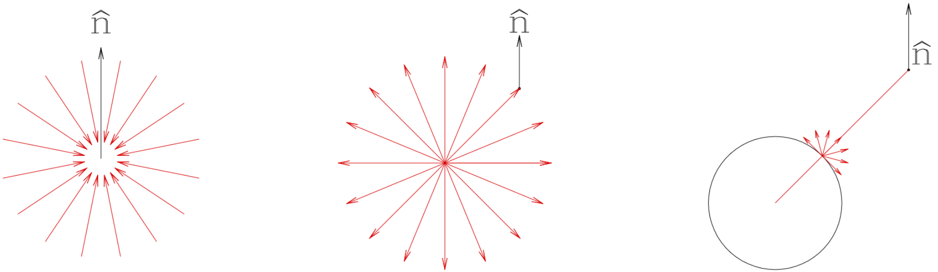

Figura: (a) Campo isotrópico de radiación; (b) campo de una fuente isotrópica; (c) esfera radiando semi-isotropicamente.

2.1.2. Relación con ondas electromagnéticas

Campo de radiación isotrópica

- *Radiación isotrópica* corresponde a una intensidad I_ν independiente de la dirección de propagación $\hat{k}$; se observa la misma intensidad en todas las direcciones.
- Difiere del de una fuente emitiendo de forma isotrópica, en el cual un observador lejano ve radiación proveniente de una zona específica, no de todas direcciones.
- Un ejemplo bien conocido es el fondo cósmico de microondas (CMB).
- Si I_ν no depende de $\hat{k}$, entonces sale de las integrales sobre $d\Omega$:
  - $J_\nu = I_\nu$, al ser la intensidad específica igual a la intensidad media;
  - $F_\nu = 0$, el flujo neto de radiación es nulo, dado que rayos de luz atraviesan una superficie dada direcciones opuestas;
  - $P_\nu = u_\nu/3$, a partir de la integral de $\cos^2\theta\, d\Omega$.

2.2. La ecuación de transferencia radiativa

2.2. La ecuación de transferencia radiativa

- La conservación de la energía en un haz de radiación que se propaga entre dos puntos (1) y (2) implica $I_{\nu 1} = I_{\nu 2}$.
- Esta igualdad se generaliza a lo largo de una trayectoria dada (s) con la relación,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0\,. \tag{15}$$

- La interacción de la radiación con el medio altera esta relación que se generaliza mediante la ecuación de transferencia radiativa. Los procesos a considerar son emisión espontánea e inducida, absorción y dispersión.

2.2.1. Emisión espontánea

- Un medio emite radiación al modificar la ocupación de niveles de energía de sus átomos y moléculas por procesos interactivos, como choques entre partículas.
- La emisión espontánea de radiación sigue el principio de mínima energía.
- La energía adquirida se incorpora al haz de radiación,

$$d\mathcal{E} = \jmath_\nu \, dV \, d\Omega \, dt \, d\nu \,,$$

  con $\jmath_\nu$ el coeficiente de emisión [erg cm^{-3}s^{-1}Hz^{-1}Sr^{-1}].
- El aumento de la energía radiativa por emisión espontánea se describe como,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \jmath_\nu \,. \qquad (16)$$

- Emisión espontánea isotrópica puede describirse por unidad de masa (ρ densidad de masa), mediante la emisividad específica:

$$\varepsilon_\nu = 4\pi \, \jmath_\nu / \rho \,,$$

  Unidades: [erg s^{-1}g^{-1}Hz^{-1}].

2.2.2. Absorción y emisión inducida

- La absorción de radiación puede describirse de manera probabilística, fotón por fotón, con la radiación absorbida directamente proporcional a la intensidad incidente,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \, , \tag{17}$$

  con α_ν es el coeficiente de absorción [cm^{-1}].
- $\ell_\nu = 1/\alpha_\nu$ es el *camino libre medio*.
- Un medio se puede describir con la densidad numérica de absorbedores, *n*, y la *sección eficaz* de cada absorbedor, σ_ν,

$$\alpha_\nu = n \, \sigma_\nu \, .$$

  Unidades de sección eficaz: [cm^2].
- También se usa el coeficiente de opacidad, κ_ν, relacionado a la densidad de masa,

$$\alpha_\nu = \rho \, \kappa_\nu \, ,$$

  con unidades [$\mathrm{g}^{-1}\mathrm{cm}^2$].

2.2.2. Absorción y emisión inducida

- En condiciones muy particulares, el medio es estimulado por radiación incidente y emite más radiación de la que recibe. Esta *emisión estimulada* es proporcional a la intensidad de la radiación incidente, y su comportamiento es análogo al de la absorción.
- La emisión estimulada puede descrirse mediante una contribución negativa al coeficiente de absorción, $\alpha_\nu^{estim} < 0$.
- Emisión, absorción y emisión estimulada se describen mediante los *coeficientes de Einstein* (§2.4).

2.2.3. La ecuación de transferencia radiativa y soluciones

- Procesos de emisión y absorción resultan en la ecuación de transferencia radiativa:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \jmath_\nu \,. \tag{18}$$

- En ausencia de absorción, $\alpha_\nu = 0$, la solución es

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} \jmath_\nu(s')\, ds' \,.$$

- En ausencia de emisión, $\jmath_\nu = 0$, resulta un decaimiento exponencial:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\, e^{-\tau_\nu} \,,$$

siendo τ_ν la *profundidad óptica*,

$$\tau_\nu \equiv \int_{s_0}^{s} \alpha_\nu ds' \,. \tag{19}$$

- $\tau_\nu \ll 1 \Rightarrow$ medio *transparente u ópticamente delgado*;
  $\tau_\nu \gg 1 \Rightarrow$ medio *opaco u ópticamente grueso*.

2.2.3. La ecuación de transferencia radiativa y soluciones

- Debido en parte a las incertidumbres en la estimación de distancias y tamaños de objetos astrofísicos, resulta más conveniente expresar la ecuación de transferencia en términos del espesor óptico:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \ , \tag{20}$$

donde $S_\nu \equiv \jmath_\nu/\alpha_\nu$ es *la función fuente* (emisión/absorción).

- Expresada así, la ecuación de transferencia (20) tiene como solución formal:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu)e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)}\ d\tau'_\nu \, . \tag{21}$$

- En particular, si S_ν no depende de τ_ν:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1-e^{-\tau_\nu}) \ \ . \tag{22}$$

2.2.3. La ecuación de transferencia radiativa y soluciones

- Para $\tau_\nu \ll 1$ tenemos $I_\nu(\tau_\nu) \to I_\nu(0)$; mientras que si $\tau_\nu \gg 1$, $I_\nu(\tau_\nu) \to S_\nu$.
- El comportamiento es inherente a la ec. (20): I_ν pierde su comportamiento inicial en escalas $\tau_\nu \sim 1$, adquiriendo las características del medio, dadas por la función fuente.
- En el caso de emisión estimulada, en lugar de una atenuación de la intensidad, se obtiene una amplificación exponencial de la misma.
- Podemos ver este caso tomando un coeficiente de opacidad negativo, $\tau_\nu = -\tau*$, y una función fuente negativa, $S_\nu = -S_\nu^*$, de donde,

$$I_\nu(\tau_\nu) = (I_\nu(0) + S_\nu^*)\, e^{\tau*}\,,$$

una amplificación exponencial para $\tau^* \gg 1$. Manifestaciones importantes de este proceso son los máseres, tanto Galácticos como extragalácticos.

2.3. Radiación en equilibrio termodinámico

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

- El estudio de la interacción entre materia y radiación en equilibrio termodinámico inicia propiamente con la discusión de Kirchhoff sobre los procesos involucrados, dando lugar a la ley de Kirchhoff y, posteriormente, a la distribución de Planck[2].
- En 1859 Gustav Kirchhoff consideró la emisión de radiación por un objeto mediante una función $P_e(\hat{k})$ que mide la energía radiada por cada punto del emisor en una dirección $\hat{k}$, y el proceso de absorción, descrito por el coeficiente a_λ, que indica la fracción de la radiación incidente, $P_i(-\hat{k})$, absorbida (figura 3).
- En equilibrio termodinámico la potencia emitida debe ser función de la temperatura y la longitud de onda, $P_e \rightarrow j_\lambda(T)$. El coeficiente de absorción será también función de la temperatura y longitud de onda, $a_\lambda = a_\lambda(T)$.

[2] Vease "La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica: 1894-1912", por Thomas S. Kuhn.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

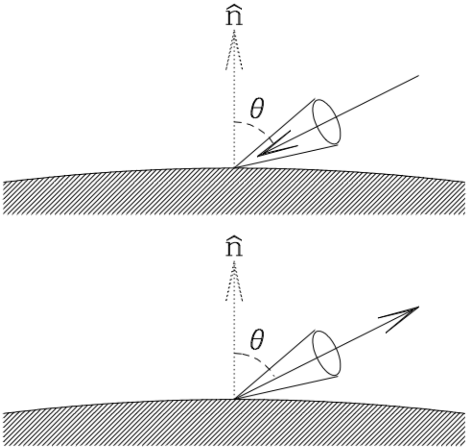

Figura: Absorción (arriba) y emisión (abajo) de radiación dentro de un cono de apertura $d\Omega$ en la dirección $\hat{k}$. Una fracción a_λ de la radiación incidente de longitud de onda λ es absorbida.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

- El equilibrio entre la radiación emitida y absorbida, y la radiación en equilibrio termodinámico a la misma temperatura, resulta en *la ley de Kirchhoff*,

$$j_\lambda(T) = a_\lambda(T) B_\lambda(T) \quad \Rightarrow \quad \frac{j_\lambda(T)}{a_\lambda(T)} = B_\lambda(T)\,, \tag{23}$$

  con $B_\lambda(T)$ la distribución en λ de la radiación en equilibrio termodinámico.

- Un aspecto fundamental identificado por Kirchhoff, es que j_λ/a_λ depende del medio, mientras que la función B_λ es de carácter universal $\Rightarrow$ la ley de Kirchhoff (23) se cumple para cualquier objeto en equilibrio termodinámico, independiente de sus propiedades.
- La ley de Kirchhoff también cumple el *principio de balance detallado*: el equilibrio $\{$potencia absorbida $=$ potencia emitida$\}$ se da no sólo de manera global, sino también de manera detallada: en cada dirección, intervalo de ángulo sólido, longitud de onda e incluso para cada componente de polarización.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

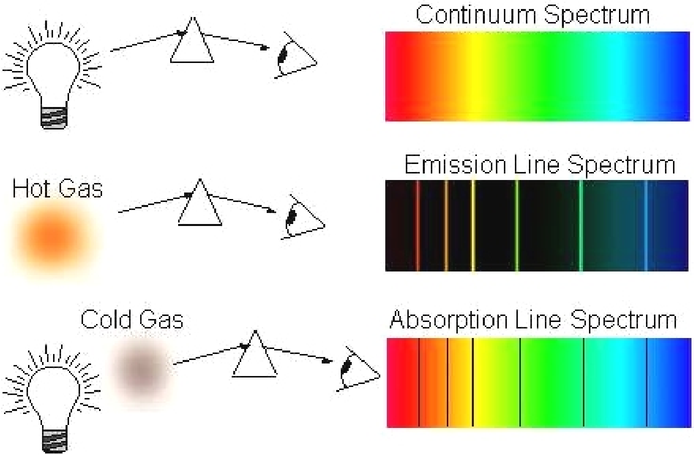

Figura: La ley de Kirchhoff indica que un buen absorbedor a una longitud de onda dada es un buen emisor en esa misma longitud de onda.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

- Hacia 1894 Planck se advocó a encontrar la función $B_\lambda(T)$, distribución espectral de la radiación en equilibrio termodinámico: el *problema del cuerpo negro*.
- Un absorbedor ideal $\Rightarrow a_\lambda = 1$, emite siguiendo la distribución espectral de la radiación, $j_\lambda(T) = B_\lambda(T)$. No refleja radiación incidente: es *completamente* negro.
- En 1879 Stefan había mostrado que la radiación contenida en una cavidad de paredes negras (figura 5) debía satisfacer $u = \sigma T^4$, con σ constante. En 1893 Wien dedujo que u debía cumplir,

$$u_\lambda = \frac{4\pi}{c} B_\lambda = \lambda^{-5}\phi(\lambda T) \quad \Rightarrow \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu = \nu^3 \phi(T/\nu)\,,$$

  con ϕ función de una sola variable. Esta es la forma original de la *ley de desplazamiento de Wien*.
- Wien buscó la expresión que mejor ajustara datos experimentales de la época, proponiendo en 1896 $B_\lambda(T) = b\lambda^{-5}e^{-a/\lambda T}$, con a y b constantes a determinar.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

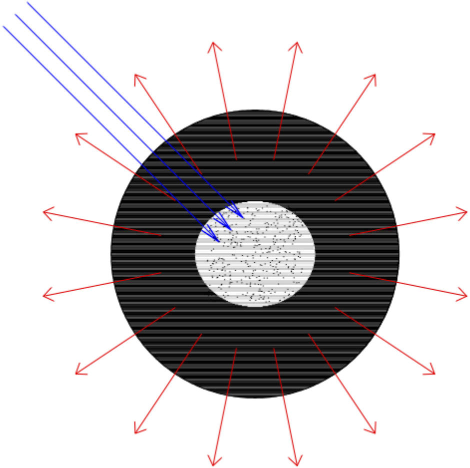

Figura: Cuerpo negro emitiendo de manera isotrópica (rojo) después de termalizar radiación anisotrópica incidente (en azul).

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

- Planck hizo un estudio estadístico de la interacción entre materia y radiación, suponiendo la respuesta de resonadores a campos electromagnéticos. Demostró en 1899 que la distribución de Wien cumple el principio de máxima entropía. Sin embargo, experimentos con detectores infrarrojos sensibles entre 12 y 18 μm a principios de 1900 mostraron que la expresión de Wien es inadecuada para longitudes de onda larga, lo que llevó a la búsqueda de una generalización.
- El 19 de octubre de 1900 Planck presentó la expresión,

$$B_\lambda(T) = \frac{C\,\lambda^{-5}}{e^{a/\lambda T} - 1}\,, \tag{24}$$

acorde con datos experimentales y con el principio de máxima entropía.

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

- La expresión (24) supone que los intercambios de energía entre la materia, los resonadores de Planck, y la radiación ocurren en múltiplos enteros, o *cuantos*, de $\varepsilon = h\nu$.
- En 1905 Rayleigh y Jeans mostraron por separado que este postulado cuántico es incompatible con los principios clásicos que, bajo el precepto de equipartición de energía, predicen que la radiación en equilibrio termodinámico debe seguir la distribución de Rayleigh-Jeans, $u_\lambda(T) = 8\pi kT/\lambda^4$.

2.3.2. Radiación de cuerpo negro

El espectro de la radiación de cuerpo negro

- La radiación emitida por un absorbedor ideal en equilibrio termodinámico a temperatura T está descrita en términos de longitud de onda como,

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}\,, \tag{25}$$

según la expresión original de Planck (24), con $h \simeq 6.626 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\,s}$.

- Esta función se expresa comúnmente en términos de la frecuencia,

$$B_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}\,. \tag{26}$$

- La distribución describe el flujo por unidad espectral, en términos de frecuencias o de longitudes de onda, por lo que debe cumplir,

$$B_\nu d\nu = B_\lambda\, d\lambda\,,$$

con $d\nu = -c\, d\lambda/\lambda^2$. La radiación de cuerpo negro (figura 6) es isotrópica.

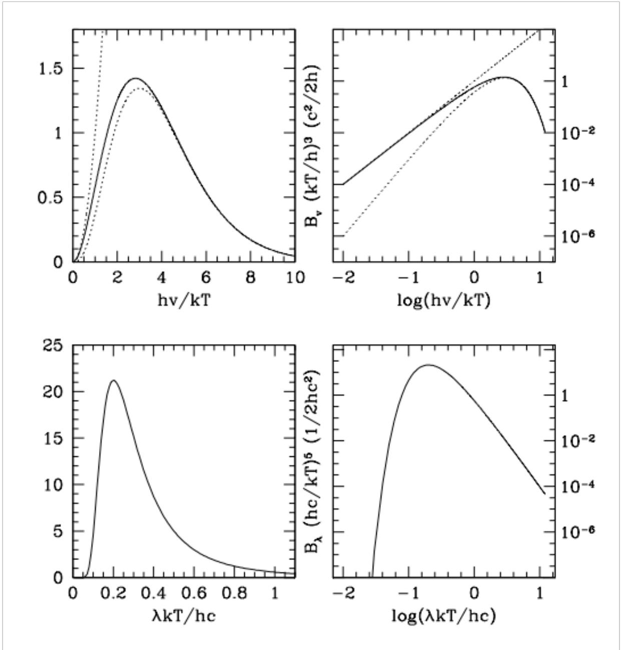

Figura: La función de Planck, B_ν (*arriba*) o B_λ (*abajo*). A la *izquierda* en unidades lineales y a la *derecha* en logarítimicas. Las líneas punteadas denotan las aproximaciones de Rayleigh-Jeans y de Wien.

2.3.2. **Radiación de cuerpo negro:** momentos geométricos

- Intensidad media y densidad de energía:
  La intensidad media, J_ν, promedio de la intensidad sobre el ángulo sólido,

$$J_\nu = B_\nu(T) \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty J_\nu(T)\, d\nu \equiv B(T) = \frac{\sigma}{\pi}\, T^4\,, \tag{27}$$

  con $\sigma = 2\pi^5 k^4/15h^3c^2 \simeq 5.67 \times 10^{-5}\, \mathrm{erg\, cm^{-2} s^{-1} K^{-4}}$ constante de Stefan-Boltzmann. J es la intensidad media integrada sobre frecuencias.

- La densidad de energía es

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad \Rightarrow \quad u(T) = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 = a T^4\,,$$

  con $a = 4\sigma/c$ la *constante de radiación* planteada por Stefan en 1879.

2.3.2. **Radiación de cuerpo negro:** momentos geométricos

- Flujo de energía:
  La Planckiana es isotrópica $\Rightarrow$ el flujo de energía es nulo, $F_\nu = 0$.
- Siguiendo (7), se integra medio hemisferio $\rightarrow F_\nu^+ = \pi B_\nu(T)$, que coincide con el flujo integrado de una fuente puntual isotrópica. Integrado sobre frecuencias,

$$F(T) = \pi B(T) = \sigma T^4 \,. \tag{28}$$

- Presión de radiación:
  Para emisión isotrópica la presión de radiación se relaciona con la densidad de energía como, $p_\nu = u_\nu/3$. La relación integrada

$$p = \frac{u}{3} = \frac{1}{3} a T^4 \,, \tag{29}$$

equivale a la ecuación de estado de un gas de radiación.

2.3.2. **Radiación de cuerpo negro:** comportamiento función de Planck

- La función de Planck es **creciente con la temperatura**, $\partial B_\nu / \partial T > 0$, de manera consistente con $B \propto T^4$.
- **La frecuencia del máximo de** B_ν corresponde a $h\nu/kT = \eta$, siendo η la solución de $\eta = 3(1 - e^{-\eta}) \simeq 2.821$, es decir

$$\nu_{max} \simeq 5.878 \times 10^{10} \mathrm{Hz} \; (T/\mathrm{K}) \; .$$

- El **máximo de** $B_\lambda \propto \lambda^{-5}$ no coincide con el de B_ν. Se sitúa en $\lambda kT/hc = 1/\zeta$, con ζ solución de $\zeta = 5(1 - e^{-\zeta}) \simeq 4.965$, resultando **la ley de desplazamiento de Wien**,

$$\lambda_{\mathrm{max}} T \approx 0.2898 \; \mathrm{cm} \, \mathrm{K} \, . \tag{30}$$

- En particular, el fondo cósmico de radiación de microondas, con $T_{cmb} = 2.726 \pm 0.010 \, \mathrm{K}$, tiene máximos: $\lambda_{max} \approx 1.06 \, \mathrm{mm}$, $\nu_{max} \approx 160 \, \mathrm{GHz}$.

2.3.2. Radiación de cuerpo negro: límites asintóticos

- A frecuencias $h\nu/kT \ll 1$, la Planckiana tiende a la función derivada por Rayleigh y Jeans en 1905, siguiendo el principio clásico de equipartición de la energía,

$$I_\nu^{(RJ)}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \,. \tag{31}$$

- Se sabía que la derivación era incorrecta, ya que la integral sobre frecuencias diverge, $\int_0^\infty I_\nu^{RJ} d\nu \to \infty$, indicando que la emisión de un objeto a temperatura ambiente debería ser muy alta en el ultravioleta, problema conocido como *catástrofe ultravioleta*.
- Para $h\nu/kT \gg 1$, la función de Planck tiende a la de Wien,

$$I_\nu^{(w)}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \,, \tag{32}$$

primera descripción propuesta para la emisión de cuerpo negro. La función de Wien decrece exponencialmente con ν, siendo integrable y cumpliendo $\lambda_{max} T = \mathrm{constante}$. Falla a frecuencias pequeñas dónde predice $I_\nu \propto \nu^3$.

2.3.2. **Radiación de cuerpo negro:** temperaturas astrofísicas

La función de Planck permite atribuir temperaturas y valorar las condiciones físicas de un emisor. Los principales estimadores de temperatura:

- Temperatura de brillo definida por la relación,

$$I_\nu = B_\nu(T_b)\,. \tag{33}$$

  Se especifica a una frecuencia determinada. En el régimen de Rayleigh-Jeans es una medida directa del flujo,

$$T_b \simeq \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu = \frac{c^2 F_\nu}{2\nu^2 k\,\Delta\Omega}\,.$$

- En radioastronomía se emplea comúnmente la *temperatura de antena*, promedio de T_b sobre el haz de la antena, incluido el ruido instrumental caracterizado por la *temperatura de ruido*. La temperatura de brillo no se usa en el régimen de Wien, donde la intensidad deja de ser una función monótona de ν.

2.3.2. **Radiación de cuerpo negro:** temperaturas astrofísicas

- La temperatura efectiva se define a partir del flujo integrado sobre el emisor,

$$F = \sigma \; T_e^4 \, .$$

- La temperatura efectiva es una medida del flujo integrado que se usa comúnmente en física estelar. La luminosidad de una estrella se puede escribir como,

$$L_* = 4\pi R_*^2 \, \sigma \, T_e^4 \, .$$

- Para el Sol $T_e \simeq 5770\,\mathrm{K}$, $F_\odot = \sigma \, T_e^4 \simeq 6.285 \times 10^{10}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}s^{-1}}$. Una estrella roja tiene típicamente $T_e \simeq 3000\,\mathrm{K}$; una azul puede alcanzar $T_e \simeq 30,000\,\mathrm{K}$.
- La temperatura de color se define estimando la función de cuerpo negro que mejor ajusta a los datos en consideración, normalizando el ajuste al flujo total.

2.3.3. Ley de Kirchhoff y radiación térmica

- La ley de Kirchhoff expresa el equilibrio entre emisión y absorción,

$$S_\nu = \jmath_\nu / \alpha_\nu = B_\nu(T)\,. \tag{34}$$

- Esta relación depende del equilibrio termodinámico, y no de las características del medio o la radiación interactuante.
- La *radiación térmica*, $S_\nu = B_\nu(T(\vec{r}))$, describe medios con distribuciones estadísticas de equilibrio termodinámico en cada punto.
- Se puede definir la temperatura localmente, $T(\vec{r})$, definiendo el *equilibrio termodinámico local* (ETL = LTE, en inglés).
- En ETL la función fuente es la función de Planck evaluada en cada coordenada o profundidad óptica, $S_\nu = B_\nu\left(T(\vec{r})\right) \longleftrightarrow S_\nu = B_\nu\left(T(\tau_\nu)\right)$.

2.3.3. Ley de Kirchhoff y radiación térmica: eq. termodinámico local

- Para radiación térmica en el régimen de Rayleigh-Jeans ($I_\nu \propto \nu^2 kT$) la ecuación de transferencia puede escribirse como,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T(\tau_\nu)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T\,. \tag{35}$$

- La emisión térmica es de cuerpo negro si $dI_\nu = 0$, caso límite en medios ópticamente gruesos, $\tau_\nu \rightarrow \infty \Rightarrow I_\nu \rightarrow B_\nu$.
- En un medio en estricto equilibrio termodinámico T es independiente de τ_ν, y la solución de la ecuación de transferencia (35) se convierte en una relación entre la temperatura de brillo y la del medio,

$$T_b(\tau_\nu) = T_b(0)\, e^{-\tau_\nu} + T\,(1 - e^{-\tau_\nu})\,.$$

De manera congruente con la solución más general, la temperatura de brillo tiende a la del medio en el caso ópticamente grueso.

2.4. Los coeficientes de Einstein

- La relación entre los coeficientes de emisión y absorción establecida por Kirchhoff proviene de una relación fundamental a nivel microscópico, independiente de la constitución del objeto, de sus condiciones físicas o del equilibrio termodinámico, la cual se expresa mediante los coeficientes introducidos por Einstein en 1916.
- Los *coeficientes de Einstein* describen los procesos en un sistema cuántico de dos niveles de energía: un nivel inferior 1 y un nivel superior 2, de energías E_1 y E_2, pesos estadísticos g_1 y g_2, y poblaciones n_1 y n_2, respectivamente.
- La interacción entre el sistema y la radiación se da mediante transiciones entre los niveles energéticos que se manifiestan con la emisión o absorción de un fotón de energía $h\nu = E_2 - E_1$.

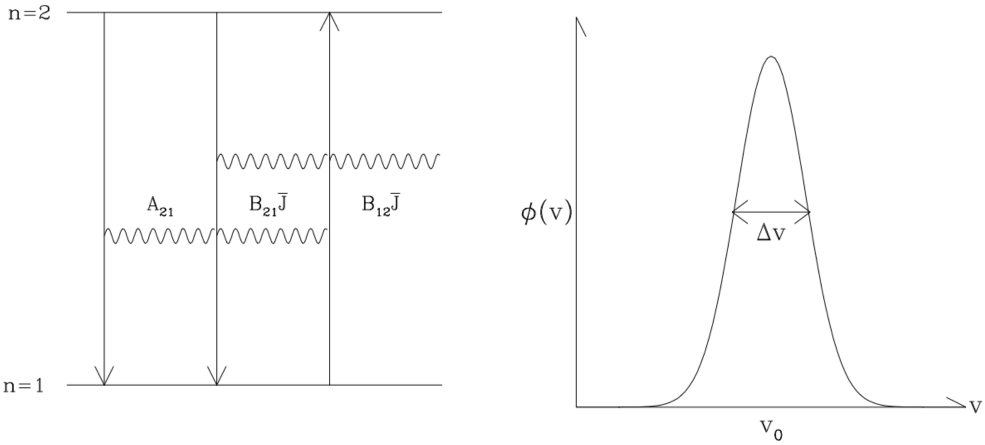

Figura: *Izquierda:* procesos de emisión espontánea, emisión inducida y absorción entre dos niveles de energía de un sistema. *Derecha:* función de probabilidad de que el sistema absorba o emita un fotón de frecuencia ν.

2.4. Los coeficientes de Einstein

- La energía E_2 tiene una indeterminación intrínseca descrita por una función $\phi(\nu)$, centrada en $\nu_0 = \Delta E/h$, que representa la probabilidad de emitir o absorber un fotón de energía ν (figura 7). El ancho de esta función está dictado por el principio de indeterminación, $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, con Δt tiempo de decaimiento desde el nivel n_2.
- En la práctica varios procesos contribuyen a ensanchar la función $\phi(\nu)$: por ejemplo, la distribución de velocidades de las partículas provoca un ensanchamiento $\Delta\nu \propto \nu_0\sqrt{kT/mc^2}$, conocido como el efecto Doppler térmico.

2.4. Los coeficientes de Einstein

- Los procesos de interacción corresponden con la ecuación de transferencia radiativa:
  - **Emisión espontánea**: descrita por el coeficiente A_{21} que cuantifica la probabilidad de transición por unidad de tiempo (s^{-1}).
  - **Absorción**: descrita por el coeficiente B_{12} y la intensidad media de la radiación, J_ν. La probabilidad de transición por absorción es $B_{12}\bar{J}_\nu$, pesando la intensidad media sobre la respuesta del sistema,

$$\bar{J}_\nu = \int_0^\infty J_\nu\,\phi(\nu)\,d\nu\,.$$

  - **Emisión estimulada**: descrita de forma análoga a la absorción. La probabilidad de transición queda expresada en términos de $B_{21}\bar{J}_\nu$.
- Hay *equilibrio estadístico* cuando las transiciones $1 \to 2$ igualan $2 \to 1$, es decir

$$n_1 B_{12}\bar{J}_\nu = n_2 B_{21}\bar{J}_\nu + n_2 A_{21} \quad \Rightarrow \quad \bar{J}_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)\,(B_{12}/B_{21}) - 1}\,, \tag{36}$$

  relación fundamental entre las poblaciones de los niveles y la radiación emitida.

2.4. Los coeficientes de Einstein

- En equilibrio termodinámico $\bar{J}_\nu = B_\nu$, y las poblaciones de los niveles se relacionan mediante la ley de Boltzmann,

$$n_1/n_2 = (g_1/g_2)e^{-(E_1-E_2)/kT} \,.$$

- Al considerar equilibrio se obtienen las relaciones entre los coeficientes de Einstein:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}\,, \quad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}\,. \tag{37}$$

Estas son propiedades fundamentales de los sistemas cuánticos que describen la interacción entre materia y radiación.

- Las relaciones entre coeficientes de Einstein pueden emplearse fuera de equilibrio termodinámico. Los coeficientes de emisión y absorción vienen dados por,

$$\jmath_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu) n_2 A_{21}\,, \quad \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)\left(n_1 B_{12} - n_2 B_{21}\right)\,, \tag{38}$$

en lo que se conoce como *relaciones de balance detallado*.

2.4. Los coeficientes de Einstein

- Los coeficientes j_ν y α_ν dependen de las poblaciones n_1 y n_2. El cociente entre los coeficientes de emisión y absorción es la función fuente, dada por,

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} = \frac{2h\nu^3/c^2}{n_1 g_2/n_2 g_1 - 1} \, . \tag{39}$$

- Si las poblaciones están en equilibrio y, por ello, se ajustan a la ley de Boltzmann, tenemos emisión térmica, $S_\nu = B_\nu(T)$, para $\nu \simeq \nu_0 = \Delta E/h$.
- Un caso radicalmente fuera de equilibrio es un sistema con una sobrepoblación del nivel superior, tal que $n_2 g_1 > n_1 g_2$. El coeficiente de absorción es entonces negativo y la radiación incidente es amplificada de manera exponencial, $I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{|\alpha_\nu| s}$, dando lugar al efecto *maser*.
- Esta emisión se observa en regiones con choques que provocan sobrepoblaciones de los niveles superiores, muy distantes al equilibrio termodinámico.

2.5. Dispersión

- El proceso de *dispersión*, o dispersión pura, (*scattering* en Inglés) consiste en la absorción y re-emisión isotrópica y coherente de radiación.
- El término coherente indica que la radiación incidente y la dispersada tienen mismas características espectrales[3].
- La dispersión se describe mediante el coeficiente respectivo, $\alpha_\nu^{(d)}$, tal que,

$$\jmath_\nu^{(d)} = \alpha_\nu^{(d)} J_\nu \ , \tag{40}$$

  con J_ν la intensidad media.
- En el caso de dispersión sin absorción y sin emisión espontánea, $S_\nu = J_\nu$, y,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu^{(d)} (I_\nu - J_\nu) \, . \tag{41}$$

  Siendo J_ν una integral de I_ν, la ecuación (41) resulta ser integro-diferencial.

[3] A diferencia de la dispersión Raman (Raman scattering), donde las frecuencias de absorción y re-emisión son distintas.

2.5. Dispersión

- El término $\alpha_\nu^{(d)} I_\nu$ denota la fracción de radiación "interceptada" por el dispersor, la cual es re-emitida isotrópicamente a través del término $\alpha_\nu^{(d)} J_\nu$.
- Si $\alpha_\nu^{(d)}$ depende de ν, la distribución espectral observada localmente varía con la ubicación, $I_\nu(s) \neq I_\nu(0)$, aunque no lo haga en promedio, $J_\nu(s) = J_\nu(0)$.
- En la dispersión de luz solar en la atmósfera, o *dispersión de Rayleigh*, el coeficiente de dispersión es función creciente de la frecuencia, $\alpha_\nu^{(d)} \propto \nu^4$: el disco solar se enrojece al dispersarse la componente azul y ultravioleta en la atmósfera.
- Se puede considerar la acción conjunta de dispersión, absorción ($\alpha_\nu^{(a)}$) y emisión, Para radiación térmica, la ecuación de transferencia radiativa queda como:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\left(\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)}\right)(I_\nu - S_\nu) \,, \tag{42}$$

con la ley de Kirchhoff, $j_\nu^{(a)} = \alpha_\nu^{(a)} B_\nu$, para redefinir la función fuente,

$$S_\nu \equiv \frac{\alpha_\nu^{(a)} B_\nu + \alpha_\nu^{(d)} J_\nu}{\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)}} \,, \tag{43}$$

2.5. Dispersión

- La emisión espontánea está contenida en $\jmath_\nu^{(a)} = \alpha_\nu^{(a)} B_\nu$, mientras que la absorción pura es $\alpha_\nu^{(a)} I_\nu$, y los términos de dispersión son aquellos proporcionales a $\alpha_\nu^{(d)}$.
- A la suma de los coeficientes de dispersión y absorción, $\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)}$, se le denomina *coeficiente de extinción*. Un ejemplo concreto es la extinción debida a la atmósfera terrestre en datos de fotometría o espectroscopía en el visible.

2.6. Atmósferas plano paralelas

2.6. Atmósferas plano paralelas

- Una atmósfera plano-paralela está estructurada a lo largo de una sola dirección, como se ilustra en la figura 8. Esta aproximación es útil para el estudio de atmósferas delgadas, de dimensiones mucho menores que el radio del objeto.
- Las propiedades físicas de la atmósfera se consideran dependientes solamente de la coordenada z, la cual mide la profundidad física, o directamente de τ_ν, dada por $d\tau_\nu = \pm\alpha_\nu dz$.
- La intensidad de la radiación depende también del ángulo θ medido en relación al eje z, que muchas veces se reemplaza convenientemente por $\mu = \cos\theta$.
- A continuación se presentan tres aplicaciones: la ecuación de difusión radiativa; la aproximación de Eddington, con la solución para una atmósfera gris; y una solución a la ecuación transferencia de energía radiativa en atmósferas plano-paralelas propuesta por Edouard Simonneau.

2.6. Atmósferas plano paralelas

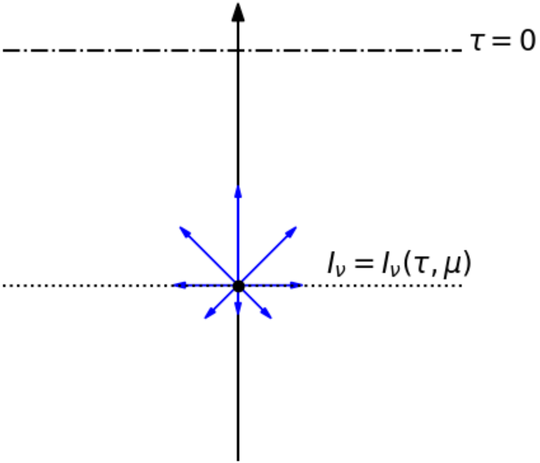

Figura: Geometría de una atmósfera plano paralela. La estratificación es vertical y cuantificada mediante τ, o también mediante z. La línea es a lo largo de $ds = (\pm) dz/\mu$, con $\mu = \cos\theta$.

2.6.1. La ecuación de difusión radiativa

- La ecuación de difusión radiativa se obtiene mediante la *aproximación de Rosseland*, que conduce a la relación entre el flujo de energía radiativa y el gradiente de temperatura de un medio.
- Suponemos el medio estratificado, en aproximación plano-paralela, de forma que sus propiedades físicas dependen únicamente de la coordenada, z.
- La intensidad de la radiación I_ν es función de z y de $\mu = \cos\theta$, con θ ángulo entre la línea de visión y el eje $\hat{z}$.
- Usamos $ds = dz/\mu$, para escribir la ecuación de transferencia como:

$$\mu \frac{\partial I_\nu(z,\mu)}{\partial z} = -\alpha_\nu \left(I_\nu - S_\nu(z) \right) , \tag{44}$$

donde $\alpha_\nu = \alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s$, considera los procesos de absorción y dispersión. El inverso de μ se denomina *masa de aire*.

2.6.1. La ecuación de difusión radiativa

- Podemos despejar I_ν,

$$I_\nu = S_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial z}\right), \tag{45}$$

  planteando una relación propicia para un proceso de iteración.
- A orden cero despreciamos el cambio de la intensidad con la profundidad, de donde,

$$I_\nu^{(0)}(z,\mu) = S_\nu^{(0)}(z).$$

- $S_\nu^{(0)}$ no depende de μ, es isotrópica y $J_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)}$. Esto es válido en particular para un medio con emisión térmica, $S_\nu^{(0)} = B_\nu$.
- La aproximación de Rosseland consiste en suponer que la función fuente es una superposición de funciones de Planck con $T = T(z)$.
- Substituyendo en la ecuación (45) obtenemos, a primer orden,

$$I_\nu^{(1)}(z,\mu) = B_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu}\left(\frac{dB_\nu}{dz}\right). \tag{46}$$

2.6.1. La ecuación de difusión radiativa

- Calculamos entonces el flujo de radiación,

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu(z,\mu)\ \mu d\mu = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu}\frac{dB_\nu}{dz} = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu}\left(\frac{dB_\nu}{dT}\right)\frac{dT}{dz}\,. \qquad (47)$$

- Al integrar sobre frecuencias obtenemos la ecuación de difusión radiativa,

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R}\frac{dT}{dz}\,, \qquad (48)$$

definiendo la opacidad de Rosseland,

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s}\right)\left(\frac{dB_\nu}{dT}\right) d\nu\right] \Big/ \left[\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT}\, d\nu\right]\,. \qquad (49)$$

- La ecuación de difusión radiativa describe el flujo de energía bajo un gradiente de temperatura. Es de particular relevancia en el estudio de interiores estelares.

2.6.2. Aproximación de Eddington y atmósfera gris

- La aproximación de Eddington propone un flujo semi-isotrópico en una atmósfera, describiendo la intensidad como función lineal de μ,

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = a_\nu(\tau_\nu) + \mu\, b_\nu(\tau_\nu), \tag{50}$$

donde $d\tau_\nu = \alpha_\nu dz$, la profundidad óptica a lo largo de la vertical.

- Las funciones $a_\nu(\tau_\nu)$ y $b_\nu(\tau_\nu)$ se relacionan con los momentos de la intensidad específica, es decir la intensidad media, el flujo de radiación y su presión

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I_\nu\ d\mu = \frac{c}{4\pi}u_\nu = a_\nu\,, \quad F_\nu = 2\pi\int_{-1}^{+1} I_\nu\ \mu d\mu = \frac{4\pi}{3}b_\nu\,, \\ p_\nu &= \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{+1} I_\nu\ \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3}\frac{a_\nu}{c}\,. \end{aligned} \tag{51}$$

- Campos semi-isotrópicos de radiación cumplen la misma relación entre densidad y presión que los isotrópicos,

$$p_\nu = \frac{1}{3}u_\nu\,. \tag{52}$$

2.6.2. Aproximación de Eddington y atmósfera gris

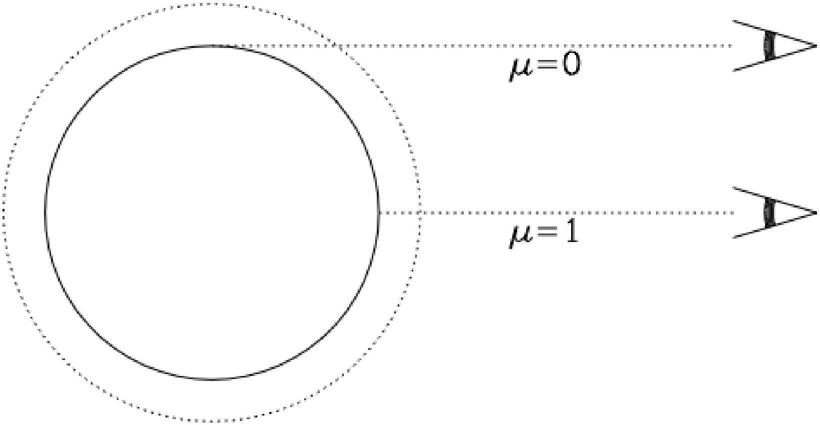

Figura: Rayos de luz provenientes del disco y del limbo del Sol.

2.6.2. Aproximación de Eddington y atmósfera gris

- Al substituir la aproximación (50) en la ecuación de transferencia radiativa podemos relacionar las funciones a_ν y b_ν con S_ν.
- Entre las aplicaciones de la aproximación de Eddington está la atmósfera gris, donde la opacidad se supone independiente de la frecuencia, $\tau_\nu = \tau$.
- Se integra sobre ν para trabajar con las funciones $a_\nu \to a$, $b_\nu \to b$ integradas, y $S = B = (\sigma/\pi)T^4$ para emisión térmica.
- Relacionamos $T = T(\tau)$ con la temperatura efectiva para un flujo solamente emergente, $F^+ = \sigma T_e^4$, en la frontera externa de la atmósfera, $\tau = 0$. Así

$$I(\tau, \mu) = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\mu + \tau + \frac{2}{3}\right), \quad T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau + \frac{2}{3}\right), \tag{53}$$

con $T(0) = (1/2)^{1/4} T_e \simeq 0.841 T_e$, y $T(\tau) = T_e$ en $\tau = 2/3$.

2.6.2. Aproximación de Eddington y atmósfera gris

- La expresión completa para la intensidad (53) contiene la ley de oscurecimiento al limbo,

$$\frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} = \frac{3}{5}\left(\mu + \frac{2}{3}\right). \tag{54}$$

- En las aproximaciones de Eddington y de atmósfera gris se obtiene que la intensidad de la radiación observada en el limbo debe ser 0.4 veces la del centro del disco (figura 9).

2.6.3. La solución de Simonneau para una atmósfera plano-paralela

- Edouard Simonneau propuso un tratamiento para estimar el espectro emergente de una atmósfera estelar, dado el coeficiente de opacidad, κ_λ, en función de la longitud de onda[4].
- Para $\tau_\lambda \gg 1$, la ecuación de transferencia en el caso térmico puede escribirse,

$$\mu \frac{\partial I_\lambda}{\partial \tau_\lambda} = I_\lambda - B_\lambda\left(T(\tau_\lambda)\right), \tag{55}$$

y la podemos aproximar mediante,

$$I_\lambda = B_\lambda + \mu \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}.$$

- Proponemos entonces para la intensidad en la superficie $(\tau_\lambda = 0)$

$$I_\lambda(0,\mu) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad \mu < 0 \\ B_\lambda(0) + \mu\left[dB_\lambda/d\tau_\lambda\right]_0 & \text{para} \quad \mu \geq 0 \end{cases}. \tag{56}$$

[4] siguiendo el tratamiento original de Simonneau (1981), se usa λ en vez de ν.

2.6.3. La solución de Simonneau para una atmósfera plano-paralela

- Calculamos el flujo en la superficie,

$$F_\lambda(0) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\lambda \, \mu \, d\mu = \pi B_\lambda(0) + \frac{2\pi}{3} \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}(0) \,. \tag{57}$$

  En la atmósfera plano-paralela suponemos el flujo integrado independiente[5] de z.
- Procedemos a integrar (57) sobre λ, con las definiciones de opacidad media de Rosseland (49) y de Planck,

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{B(T)} \int_0^\infty \alpha_\lambda B_\lambda d\lambda \,. \tag{58}$$

- Relacionando flujo y temperatura efectiva, $F = \sigma T_e^4$; y la integral de la Planckiana con la temperatura superficial, $B(T_0) = (\sigma/\pi) T_0^4$, con $T_0 = T(0)$, se obtiene

$$F = \pi B(0) + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_R} \right) B(0) \quad \Rightarrow \quad T_0^4 = \frac{T_e^4}{1 + 4\alpha_p/3\alpha_R} \,. \tag{59}$$

[5] el flujo integrado es aproximadamente constante para una atmósfera delgada en simetría esférica.

2.6.3. La solución de Simonneau para una atmósfera plano-paralela

- Podemos calcular la temperatura física en la superficie, $\tau = 0$, en función de la temperatura efectiva, siempre y cuando podamos determinar $\alpha_p(\rho, T)$ y $\alpha_R(\rho, T)$.
- En el caso de una atmósfera gris, $\alpha_\lambda = \mathrm{cte}$, tenemos $\alpha_p = \alpha_R$, de donde $T_0 = (3/7)^{1/4} T_e \simeq 0.8091\, T_e$.
- Esta expresión es más cercana a la solución exacta, $T_0 \simeq 0.8112\, T_e$, que la solución de Eddington.
- Conocida la temperatura al borde de la atmósfera, es posible deducir el espectro emergente (57), con la Planckiana y su derivada:

$$F_\lambda = \pi B_\lambda(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha_p}{3\alpha_\lambda} \left(\frac{e^{hc/\lambda k T_0}}{e^{hc/\lambda k T_0} - 1} \right) \frac{hc}{\lambda k T_0} \right\} . \tag{60}$$

2.6.3. La solución de Simonneau para una atmósfera plano-paralela

- En el régimen de Rayleigh-Jeans ($\lambda \gg hc/kT_0$),

$$F_\lambda \approx \pi B_\lambda(0)\,(1 + \alpha_p/3\alpha_\lambda)\,,$$

coincidiendo el flujo con un cuerpo negro donde el medio es opaco, $\alpha_\lambda \gg \alpha_p$.

- En la región de Wien ($\lambda \ll hc/kT_0$), comúnmente situada en el ultravioleta,

$$F_\lambda \approx \pi B_\lambda(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha_p}{3\alpha_\lambda} \left(\frac{hc}{\lambda k T_0} \right) \right\}\,,$$

siendo $F_\lambda \propto B_\lambda(0)/\alpha_\lambda$ para $\alpha_\lambda \ll \alpha_p$.

- El cálculo exacto del espectro dado por (60) requiere la forma funcional de α_λ.