

Capítulo 2

Transferencia radiativa

Alberto Carramiñana, 31 de agosto de 2020.

Los procesos de interacción entre radiación electromagnética y materia se describen formalmente a través de la *ecuación de transferencia radiativa*. Este formalismo emplea como cantidad básica la intensidad de la radiación, que se relaciona con cantidades medibles como el flujo de energía. La intensidad del campo radiativo es afectada por los procesos de absorción, emisión y dispersión. Este formalismo se describe a continuación.

2.1. Definiciones

2.1.1. Intensidad y cantidades derivadas

La variable fundamental para la descripción del transporte de energía radiativa es la intensidad específica, I_ν , que describe físicamente a un haz de radiación. Se define a partir del flujo de energía (\mathcal{E}) por unidad de tiempo (t), área (A), frecuencia (ν) y ángulo sólido (Ω),

$$\frac{d\mathcal{E}}{dA dt} = I_\nu(\hat{k}, \vec{r}, t) \hat{k} \cdot \hat{n} d\Omega d\nu, \quad (2.1)$$

con \hat{n} la normal al elemento de área dA que atraviesa el haz, el cual se propaga en la dirección \hat{k} . I_ν es función de la posición, del tiempo, de la frecuencia y del vector de propagación¹. I_ν contiene información de la distribución espacial, angular y espectral del campo de radiación. Las unidades (cgs) de la intensidad específica son [$\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{Sr}^{-1}$]. El formalismo

¹La combinación (\hat{k}, ν) corresponde con el vector $\vec{k} = (2\pi\nu/c)\hat{k}$. El vector de propagación, $\hat{k} = \hat{z} \cos \theta + (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \sin \theta$ se relaciona directamente con el ángulo sólido, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

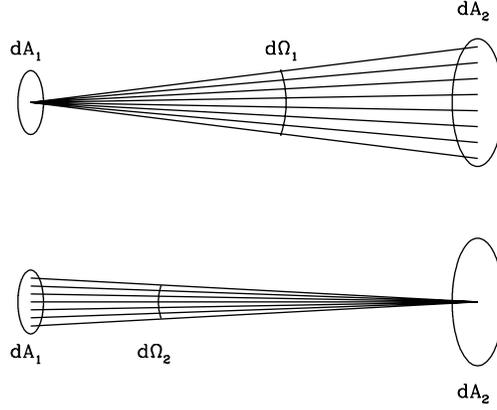


Figura 2.1: Todos los haces de radiación que salen de (1) con una apertura dada por el ángulo sólido $d\Omega_1$ atraviesan la diferencial de área $dA_2 = r^2 d\Omega_1$, siendo r la distancia entre ambos puntos. De misma manera, aquellos que pasan por el punto (2) habiendo salido de (1) abarcan un ángulo sólido $d\Omega_2 = dA_1/r^2$. Se desprende que $dA_1 d\Omega_1 = dA_2 d\Omega_2$.

de transferencia radiativa puede hacerse tanto en términos de la frecuencia, ν , como de la longitud de onda, λ , relacionadas mediante,

$$I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu \quad \Rightarrow \quad I_\lambda = -\frac{c}{\lambda^2} I_\nu, \quad (2.2)$$

con el signo negativo indicando el sentido opuesto en los intervalos respectivos.

La conservación de la energía radiativa se traduce en la constancia de la intensidad específica en un haz. Considerando un emisor situado en un punto (1) y un receptor en el punto (2), tenemos que la cantidad de energía que sale de (1) y llega a (2) está dada por,

$$d\mathcal{E}_1 = I_{\nu 1} dA_1 d\Omega_1 dt d\nu,$$

donde $d\Omega_1$ es el ángulo sólido que abarca el receptor (2) visto desde (1). Por otro lado, la cantidad de energía recibida en (2) está dada por

$$d\mathcal{E}_2 = I_{\nu 2} dA_2 d\Omega_2 dt d\nu.$$

En el caso de conservación de la energía radiativa, se tiene $d\mathcal{E}_1 = d\mathcal{E}_2$: la energía emitida dentro del cono de apertura $d\Omega_1$ coincide con la captada en

el área dA_2 , y la recibida dentro del cono de apertura $d\Omega_2$ coincide con la emitida dentro del área dA_1 . En virtud de que $dA_1 d\Omega_1 = dA_2 d\Omega_2$ (figura 2.1), tenemos

$$I_{\nu 1} = I_{\nu 2}. \quad (2.3)$$

En ausencia de procesos de absorción o emisión, la intensidad específica del haz es constante a lo largo de su trayectoria. Partiendo de I_ν se definen algunas cantidades físicas definidas por sus momentos geométricos.

Intensidad media y densidad de energía

La *intensidad media* de la radiación, J_ν , es el promedio de la intensidad sobre todas las direcciones:

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega, \quad (2.4)$$

con unidades de $[\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}]$. La intensidad media tiene la misma forma funcional que la *densidad de energía*, u_ν , que se define también integrando la intensidad sobre el ángulo sólido,

$$u_\nu \equiv \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu, \quad (2.5)$$

donde el factor c indica el paso de flujo a densidad. La densidad de energía representa la cantidad de energía por unidad de volumen y de rango espectral en forma de radiación y tiene unidades de $[\text{erg cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}]$.

Flujo de energía

El flujo de energía es una cantidad que se puede medir observacionalmente. Corresponde al primer momento de la distribución angular de la intensidad,

$$F_\nu \equiv \int I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (2.6)$$

y tiene unidades de $[\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}]$. F_ν representa la energía transportada por unidad de área, de tiempo y de intervalo espectral. El término en coseno corresponde a $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta$, siendo \hat{k} la dirección de propagación de la radiación y \hat{n} la normal al elemento del área emisor o receptor. Para fuentes distantes con flujo F_ν , la intensidad promedio está dada por $\langle I_\nu \rangle = F_\nu / \Delta\Omega$, con $\cos \theta = 1$.

El flujo de energía tiene la particularidad de ser cero en el caso isotrópico. Podemos definir dos componentes: de incidencia paralela a una superficie y

anti-paralela a la misma, considerada aquí normal al eje \hat{z} . En coordenadas esféricas,

$$F_{\nu}^{+} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\nu} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad F_{\nu}^{-} = \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{\pi/2} I_{\nu} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.7)$$

de manera que $F_{\nu} = F_{\nu}^{+} - F_{\nu}^{-}$.

Es de distinguir el flujo emitido, $F_{\nu 1}$, del recibido, $F_{\nu 2}$: cuando la intensidad se conserva, estos se relacionan aproximadamente como $I_{\nu} \simeq F_{\nu 1}/\Delta\Omega_1 = F_{\nu 2}/\Delta\Omega_2$, siendo $\Delta\Omega_1$ el ángulo sólido dentro del cual se da la emisión, y $\Delta\Omega_2$ el ángulo sólido que abarca la fuente vista por el observador. Generalmente $\Delta\Omega_2 \ll \Delta\Omega_1$, y el flujo emitido es mucho mayor que el observado, $F_{\nu 1} \gg F_{\nu 2}$. En términos de variables observadas, $F_{obs} = F_{em} (\Delta\Omega_{obs}/\Delta\Omega_{em})$. Para una fuente isotrópica $\Delta\Omega_{em} = \pi$, mientras que $\Delta\Omega_{obs} = \pi\delta\theta^2$, con $\delta\theta$ el radio angular de la fuente observada. En el caso del Sol, F_{obs} corresponde con la *constante solar*, $s_{\odot} \simeq 1367 \text{ W/m}^2$, mientras que el flujo emitido es $F_{em} \simeq 6.285 \times 10^7 \text{ W/m}^2$.

Una forma común de describir el flujo, especialmente en el óptico y bandas aledañas, es el sistema de *magnitudes*, definido de forma logarítmica,

$$m_{\nu} = -2.5 \log(F_{\nu}/F_{\nu 0}),$$

con $F_{\nu 0}$ un flujo de referencia para la frecuencia ν . El sistema de magnitudes se definió originalmente de manera que la estrella Vega tenga magnitud cero en las distintas bandas fotométricas. En radio-astronomía es más común el uso del Jansky, unidad lineal definida como,

$$1 \text{ Jy} \equiv 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}.$$

Los flujos de referencia $F_{\nu 0}$ aparecen en la tabla 1.1 del primer capítulo. Otra cantidad de interés en astronomía es el brillo del cielo, expresado comúnmente en magnitudes por segundo de arco cuadrado, que viene siendo la intensidad específica de la emisión del cielo.

Presión de radiación

La *presión de radiación* corresponde al segundo momento de la intensidad,

$$P_{\nu} \equiv \frac{1}{c} \int I_{\nu} \cos^2 \theta d\Omega, \quad (2.8)$$

con unidades de $[\text{dyn cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}]$, que vienen siendo unidades de densidad de energía $[\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}]$.

La intensidad específica y sus momentos caracterizan las componentes espectrales de un haz de radiación. Pueden ser integradas sobre frecuencia o longitud de onda,

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad u = \int_0^\infty u_\nu d\nu, \quad F = \int_0^\infty F_\nu d\nu, \quad \dots \quad (2.9)$$

para obtener las cantidades globales.

2.1.2. Relación con ondas electromagnéticas

En el capítulo 1 se definieron el flujo y la densidad de energía de un campo electromagnético,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{k}, \quad u = \frac{|\vec{E}|^2}{4\pi}, \quad (2.10)$$

con \vec{S} el vector de Poynting. A partir del flujo de energía se tiene,

$$\mathcal{E} = \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA dt = \int \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{k} \cdot \hat{n} dA dt = \int I_\nu \hat{k} \cdot \hat{n} dA dt d\nu d\Omega. \quad (2.11)$$

Se puede ir formalmente de la dependencia temporal de los campos a su descripción espectral a través de la transformada de Fourier.

La dependencia de \vec{S} con los campos es cuadrática, de donde se desprende que la definición se refiere al flujo por unidad de tiempo o por unidad de frecuencia,

$$\vec{S}(t) \longrightarrow \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{S}(\omega) \longrightarrow \text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}.$$

Para poder definir un flujo *por unidad de tiempo y de frecuencia* es necesario considerar formalmente intervalos espectrales y temporales que satisfagan $\Delta\omega\Delta t \gg 1$. Siendo así, podemos considerar el flujo por unidad de frecuencia promediado por cada ciclo,

$$\vec{S}_\omega = (\omega/2\pi) \langle \vec{S}(\omega) \rangle \longrightarrow \text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (2.12)$$

Un campo de radiación incorporará un conjunto de ondas electromagnéticas propagándose en todas direcciones,

$$\vec{S}_\omega(\vec{r}) = \sum_{\hat{k}} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{c}{4\pi} \right) |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \hat{k}, \quad (2.13)$$

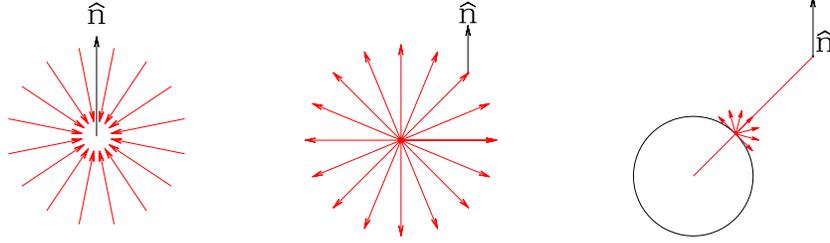


Figura 2.2: (a) Campo isotrópico de radiación; (b) campo de una fuente isotrópica; (c) esfera radiando semi-isotropicamente.

siendo $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ una componente de Fourier del campo eléctrico de radiación y \hat{k} el vector de propagación del mismo. La intensidad específica I_ω considera la distribución angular de \vec{S}_ω , de manera que podemos identificarla con

$$I_\omega(\vec{r}, \hat{k}) = \left(\frac{\omega c}{8\pi^2} \right) \frac{d}{d\Omega} \left\{ |E(\vec{r}, \omega)|^2 \right\}. \quad (2.14)$$

El cálculo de la intensidad, la densidad de energía, el flujo y la presión de radiación requieren la consideración de la geometría del mismo (fig. 2.2).

Campo de radiación isotrópica

Radiación isotrópica corresponde a una intensidad I_ν independiente de la dirección de propagación \hat{k} . Este caso difiere del de una fuente emitiendo de forma isotrópica, en el cual un observador lejano ve radiación proveniente de la dirección de la fuente, no de todas direcciones. En el caso de radiación isotrópica se observa la misma intensidad en todas las direcciones. Un ejemplo bien conocido es el fondo cósmico de microondas (CMB). Si I_ν no depende de \hat{k} , entonces sale de las integrales sobre $d\Omega$:

- $J_\nu = I_\nu$, al ser la intensidad específica igual a la intensidad media;
- $F_\nu = 0$, el flujo neto de radiación es nulo, dado que rayos de luz atraviesan una superficie dada direcciones opuestas;
- $P_\nu = u_\nu/3$, a partir de la integral de $\cos^2 \theta d\Omega$.

2.2. La ecuación de transferencia radiativa

La conservación de la energía en un haz de radiación que se propaga entre dos puntos (1) y (2) implica $I_{\nu 1} = I_{\nu 2}$. Esta igualdad se generaliza a lo largo

de una trayectoria dada (s) con la relación,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0. \quad (2.15)$$

La interacción de la radiación con el medio altera esta relación que se generaliza mediante la ecuación de transferencia radiativa. Los procesos a considerar son emisión espontánea e inducida, absorción y dispersión.

2.2.1. Emisión espontánea

Un medio emite radiación cuando sus átomos y moléculas modifican la ocupación de sus distintos niveles energía debido a procesos como choques de partículas. La emisión de radiación es una forma natural de liberar energía, de acuerdo al principio físico de mínima energía. Así, la energía adquirida por algún proceso físico se incorpora a la energía del haz de radiación siguiendo la expresión,

$$d\mathcal{E} = j_\nu dV d\Omega dt d\nu,$$

con j_ν el coeficiente de emisión [$\text{erg cm}^{-3}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{Sr}^{-1}$]. El aumento de la energía radiativa por emisión espontánea se describe como,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu. \quad (2.16)$$

Frecuentemente la emisión espontánea es isotrópica y puede describirse por unidad de masa, mediante la emisividad específica:

$$\varepsilon_\nu = 4\pi j_\nu/\rho,$$

con unidades de [$\text{erg s}^{-1}\text{g}^{-1}\text{Hz}^{-1}$], y con ρ la densidad de masa.

2.2.2. Absorción y emisión inducida

El proceso de absorción de radiación puede describirse de manera probabilística, fotón por fotón, de forma que la intensidad de radiación absorbida es directamente proporcional a la intensidad de la radiación incidente,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu, \quad (2.17)$$

con α_ν es el coeficiente de absorción [cm^{-1}]. Su inverso, $\ell_\nu = 1/\alpha_\nu$, es el *camino libre medio*. Para describir las propiedades de absorción de un medio

en términos de la densidad numérica de absorbedores podemos emplear la *sección eficaz*, σ_ν , de cada absorbedor,

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu ,$$

siendo n la densidad numérica de partículas. La sección eficaz tiene unidades de área [cm^2]. Alternativamente, se usa el coeficiente de opacidad, κ_ν , que se relaciona con la densidad de masa,

$$\alpha_\nu = \rho \kappa_\nu ,$$

con unidades [g^{-1}cm^2]. En condiciones muy particulares, el medio es estimulado por radiación incidente y emite más radiación de la que recibe. Esta *emisión estimulada* es proporcional a la intensidad de la radiación incidente, y su comportamiento es análogo al de la absorción. La emisión estimulada puede describirse mediante una contribución negativa al coeficiente de absorción, $\alpha_\nu^{estim} < 0$.

2.2.3. La ecuación de transferencia radiativa y soluciones

Considerando los procesos de emisión y absorción conjuntamente obtenemos la ecuación de transferencia radiativa:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu . \quad (2.18)$$

En el caso sin absorción, $\alpha_\nu = 0$, la solución a la ecuación queda en términos lineales:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' .$$

En el caso sin emisión, $j_\nu = 0$, la solución a la ecuación de transferencia queda como un decaimiento exponencial de la intensidad:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu} ,$$

donde τ_ν es la profundidad óptica,

$$\tau_\nu \equiv \int_{s_0}^s \alpha_\nu ds' . \quad (2.19)$$

Si $\tau_\nu \ll 1$ el medio es *transparente u ópticamente delgado*; mientras que si $\tau_\nu \gg 1$ el medio es *opaco u ópticamente grueso*.

Debido en parte a las incertidumbres en la estimación de distancias y tamaños de objetos astrofísicos, resulta más conveniente expresar la ecuación de transferencia en términos del espesor óptico:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu , \quad (2.20)$$

donde $S_\nu \equiv J_\nu/\alpha_\nu$ es la función fuente (emisión / absorción). Expresada de esta forma, la ecuación de transferencia (2.20) tiene como solución formal:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu)e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)} d\tau'_\nu . \quad (2.21)$$

En particular, si S_ν no depende de τ_ν se tiene:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) . \quad (2.22)$$

Para $\tau_\nu \ll 1$ tenemos $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow I_\nu(0)$; mientras que si $\tau_\nu \gg 1$, $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow S_\nu$. Este comportamiento es inherente a la ecuación 2.20, donde I_ν pierde su comportamiento inicial en escalas de orden $\tau_\nu \sim 1$, adquiriendo las características del medio, descrito por la función fuente.

En el caso particular de emisión estimulada, en lugar de una atenuación de la intensidad, se obtiene una amplificación exponencial de la misma. Podemos ver este caso tomando un coeficiente de opacidad negativo, $\tau_\nu = -\tau^*$, y una función fuente negativa, $S_\nu = -S_\nu^*$, de donde,

$$I_\nu(\tau_\nu) = (I_\nu(0) + S_\nu^*)e^{\tau^*} ,$$

una amplificación exponencial para $\tau^* \gg 1$. Manifestaciones importantes de este proceso son los máseres, tanto Galácticos como extragalácticos.

2.3. Radiación en equilibrio termodinámico

2.3.1. De la ley de Kirchhoff a la función de Planck

El estudio de la interacción entre materia y radiación en equilibrio termodinámico inicia propiamente con la discusión de Kirchhoff sobre los procesos involucrados, dando lugar a la ley de Kirchhoff y, posteriormente, a la distribución de Planck². En 1859 Gustav Kirchhoff consideró la emisión de radiación por parte de un objeto, describiéndola mediante una función

²El relato de esta subsección proviene de "La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica: 1894-1912", por Thomas S. Kuhn.

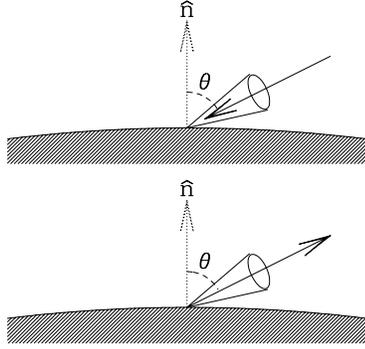


Figura 2.3: Absorción (arriba) y emisión (abajo) de radiación dentro de un cono de apertura $d\Omega$ en la dirección \hat{k} . Una fracción a_λ de la radiación incidente de longitud de onda λ es absorbida.

$P_e(\hat{k})$ que mide en cada punto del emisor la energía radiada por unidad de tiempo en una dirección \hat{k} , así como el proceso de absorción, descrito por el coeficiente de absorción a_λ , que indica la fracción de la radiación incidente, $P_i(-\hat{k})$, absorbida por el objeto (figura 2.3). Si el objeto está en equilibrio termodinámico, la potencia emitida debe ser función de la temperatura y de la longitud de onda, $P_e \rightarrow j_\lambda(T)$, y el coeficiente de absorción será también función de la temperatura y longitud de onda, $a_\lambda = a_\lambda(T)$. Si existe un equilibrio entre la radiación emitida y absorbida, y la radiación está en equilibrio termodinámico a la misma temperatura, obtenemos *la ley de Kirchhoff*,

$$j_\lambda(T) = a_\lambda(T)B_\lambda(T) \quad \Rightarrow \quad \frac{j_\lambda(T)}{a_\lambda(T)} = B_\lambda(T), \quad (2.23)$$

donde $B_\lambda(T)$ es una función que describe la distribución en longitud de onda de la radiación en estado de equilibrio termodinámico. Un aspecto fundamental identificado por Kirchhoff, es que el cociente j_λ/a_λ depende del medio, mientras que la función B_λ es de carácter universal. La ley de Kirchhoff (2.23) se cumple para cualquier objeto en equilibrio termodinámico, independiente de sus propiedades. La ley de Kirchhoff cumple también el *principio de balance detallado*: el equilibrio {potencia absorbida = potencia emitida} se cumple no sólo de manera global, sino también de manera detallada, para cada dirección, intervalo de ángulo sólido, longitud de onda e incluso para cada componente de polarización.

Hacia 1894 Planck se advocó a la búsqueda de la función $B_\lambda(T)$, la distribución espectral de la radiación en equilibrio termodinámico, el *problema del cuerpo negro*. Un absorbedor ideal, definido por $a_\lambda = 1$, emite siguiendo la distribución espectral de la radiación, $j_\lambda(T) = B_\lambda(T)$, y, al no reflejar la radiación incidente, es *completamente negro*. En 1879 Stefan había empleado argumentos termodinámicos para mostrar que la densidad de energía de

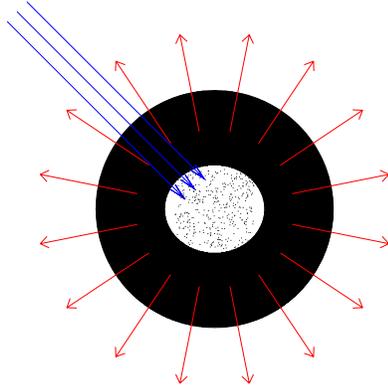


Figura 2.4: Cuerpo negro emitiendo de manera isotrópica (rojo) después de termalizar radiación anisotrópica incidente (en azul).

la radiación contenida en una cavidad de paredes negras (figura 2.4) debía satisfacer $u = \sigma T^4$, siendo σ una constante. De ahí, en 1893 Wien dedujo que u debía cumplir,

$$u_\lambda = \frac{4\pi}{c} B_\lambda = \lambda^{-5} \phi(\lambda T) \quad \Rightarrow \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu = \nu^3 \phi(T/\nu),$$

siendo ϕ una función de una sola variable. Esta es la forma original de la *ley de desplazamiento de Wien*. El mismo Wien buscó la expresión que mejor ajustara los datos experimentales de la época, proponiendo en 1896 la expresión $B_\lambda(T) = b\lambda^{-5}e^{-a/\lambda T}$, con a y b constantes a determinar.

Planck hizo un estudio estadístico de la interacción entre materia y radiación, suponiendo que ésta se da por la respuesta de resonadores a los campos electromagnéticos. Bajo consideraciones termodinámicas, demostró en 1899 que la distribución de Wien cumple el principio de máxima entropía. Sin embargo, experimentos con detectores infrarrojos sensibles entre 12 y 18 μm mostraron a principios de 1900 que la expresión de Wien es inadecuada para longitudes de onda larga, lo que llevó a la búsqueda de una generalización de la misma. El 19 de octubre de 1900 Planck presentó la expresión,

$$B_\lambda(T) = \frac{C \lambda^{-5}}{e^{a/\lambda T} - 1}, \quad (2.24)$$

que concuerda con los datos experimentales, y cumple con el principio de máxima entropía. Esta expresión supone que los intercambios de energía entre la materia, representada por los resonadores de Planck, y el campo de radiación ocurren en múltiplos enteros de elementos, o *cuantos*, de $\varepsilon = h\nu$. En 1905 Rayleigh y Jeans mostraron por separado que este postulado cuántico es incompatible con los principios clásicos que, bajo el precepto de equipartición de energía, predicen que la radiación en equilibrio termodinámico debe cumplir $u_\lambda(T) = 8\pi kT/\lambda^4$, la distribución de Rayleigh-Jeans.

2.3.2. La radiación de cuerpo negro

El espectro de la radiación de cuerpo negro

La distribución espectral de la radiación emitida por un absorbedor ideal en equilibrio termodinámico a una temperatura T está descrita en términos de la longitud de onda como,

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (2.25)$$

conforme a la expresión original de Planck (2.24), e introduciendo la constante de Planck, $h \simeq 6.626 \times 10^{-27}$ erg s. Esta función se expresa comúnmente en términos de la frecuencia,

$$B_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.26)$$

La distribución describe el flujo por unidad espectral, tanto en términos de frecuencias como de longitudes de onda, por lo que debe cumplirse,

$$B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda,$$

con $d\nu = -c d\lambda/\lambda^2$, lo que introduce un cambio en el exponente. La radiación de cuerpo negro, mostrada en la figura 2.5, es isotrópica.

Momentos geométricos

Los momentos geométricos de la función de Planck se obtienen directamente de su isotropía. Considerando su forma integrada sobre frecuencias, tenemos:

- Intensidad media y densidad de energía:

La intensidad media, J_ν , es el promedio de la intensidad sobre el ángulo sólido por lo que,

$$J_\nu = B_\nu(T) \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty J_\nu(T) d\nu \equiv B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (2.27)$$

con $\sigma = 2\pi^5 k^4/15h^3 c^2 \simeq 5.67 \times 10^{-5}$ erg cm⁻²s⁻¹K⁻⁴, la constante de Stefan-Boltzmann. J es la intensidad media integrada sobre frecuencias. La densidad de energía es

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad \Rightarrow \quad u(T) = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 = aT^4,$$

con $a = 4\sigma/c$ la *constante de radiación* planteada por Stefan en 1879.

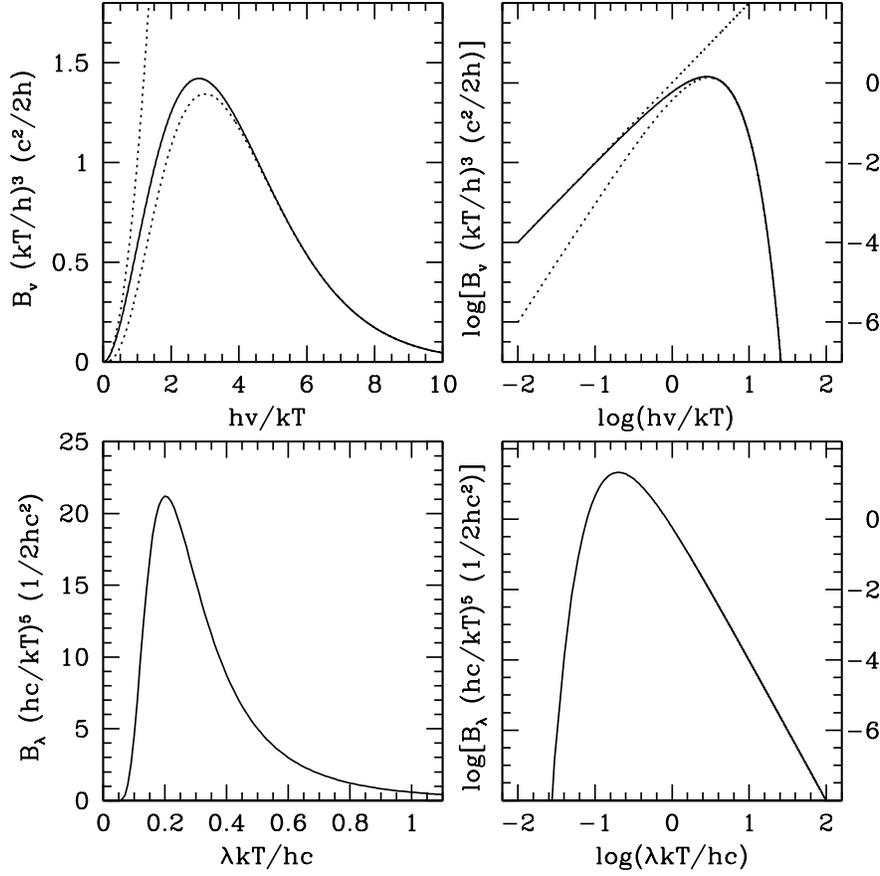


Figura 2.5: La función de Planck, B_ν (arriba) o B_λ (abajo). A la izquierda en unidades lineales y a la derecha en logarítmicas. Las líneas punteadas denotan las aproximaciones de Rayleigh-Jeans y de Wien.

- Flujo de energía:

Siendo la Planckiana isotrópica, el flujo de energía es nulo, $F_\nu = 0$. De acuerdo a 2.7, integramos la intensidad sobre medio hemisferio, obteniendo $F_\nu^+ = \pi B_\nu(T)$, que coincide con el flujo integrado alrededor de una fuente puntual isotrópica, el cual integrado sobre frecuencias es igual a,

$$F(T) = \pi B(T) = \sigma T^4. \quad (2.28)$$

- Presión de radiación:

Para emisión isotrópica la presión de radiación se relaciona con la

densidad de energía como, $p_\nu = u_\nu/3$. La relación integrada

$$p = \frac{u}{3} = \frac{1}{3}aT^4, \quad (2.29)$$

viene siendo la ecuación de estado de un gas de radiación.

Comportamiento de la función de Planck

La función de Planck es **creciente con la temperatura**, $\partial B_\nu/\partial T > 0$, de manera consistente con $B \propto T^4$, como se describió antes.

La frecuencia del máximo de B_ν corresponde a $h\nu/kT = \eta$, siendo η la solución de $\eta = 3(1 - e^{-\eta}) \simeq 2.821$, es decir

$$\nu_{max} \simeq 5.878 \times 10^{10} \text{ Hz } (T/\text{K}) .$$

Debido a la dependencia en λ^{-5} , el **máximo de B_λ** no corresponde con la longitud de onda recíproca; el punto máximo se sitúa en $\lambda kT/hc = 1/\zeta$, donde ζ es la solución de $\zeta = 5(1 - e^{-\zeta}) \simeq 4.965$. La relación resultante es **la ley de desplazamiento de Wien**,

$$\lambda_{max}T \approx 0.2898 \text{ cm K} . \quad (2.30)$$

En particular, el fondo cósmico de radiación de microondas, de temperatura $T_{cmb} = 2.726 \pm 0.010$ K, tiene máxima emisión en $\lambda_{max} \approx 1.06$ mm, y en $\nu_{max} \approx 160$ GHz.

Límites asintóticos

A bajas frecuencias, $h\nu/kT \ll 1$, la Planckiana tiende a la función derivada por Rayleigh y Jeans en 1905, siguiendo el principio clásico de equipartición de la energía,

$$I_\nu^{(RJ)}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT . \quad (2.31)$$

Se sabía que alguna suposición en la derivación era incorrecta, ya que la integral sobre frecuencias diverge, $\int_0^\infty I_\nu^{RJ} d\nu \rightarrow \infty$, indicando que la emisión de un objeto a temperatura ambiente debía ser muy alta en el ultravioleta. Este problema era conocido en su momento como la *catástrofe ultravioleta*.

Para frecuencias grandes, $h\nu/kT \gg 1$, la función de Planck tiende a la función de Wien,

$$I_\nu^{(w)}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} , \quad (2.32)$$

la primera descripción propuesta para la emisión de cuerpo negro. La función de Wien decrece exponencialmente con la frecuencias, siendo integrable y cumpliendo con la ley de desplazamiento, $\lambda_{max}T = \text{constante}$. Sin embargo, falla a frecuencias pequeñas dónde incorrectamente predice $I_\nu \propto \nu^3$.

Temperaturas astrofísicas

La función de Planck permite atribuir temperaturas a mediciones de radiación y valorar las condiciones físicas del emisor, particularmente para fuentes resueltas angularmente. Los principales estimadores de temperatura son:

- La temperatura de brillo se define por la relación,

$$I_\nu = B_\nu(T_b). \quad (2.33)$$

La temperatura de brillo se especifica para una frecuencia determinada. En el régimen de Rayleigh-Jeans la temperatura de brillo es una medida directa del flujo,

$$T_b \simeq \frac{c^2}{2\nu^2k} I_\nu = \frac{c^2 F_\nu}{2\nu^2k \Delta\Omega}.$$

En radioastronomía la intensidad se expresa comúnmente con la *temperatura de antena*, que representa el promedio de la temperatura de brillo sobre el haz de la antena, incluido el ruido instrumental caracterizado por la *temperatura de ruido*. La temperatura de brillo no se usa normalmente en el régimen de Wien, donde la intensidad cambia rápidamente con T y deja de ser una función monótona de ν .

- La temperatura efectiva se define a partir del flujo integrado en el emisor,

$$F = \sigma T_e^4.$$

La temperatura efectiva es una medida del flujo integrado que se usa comúnmente en física estelar. La luminosidad de una estrella se puede escribir como,

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_e^4.$$

Para el Sol $T_e \simeq 5770$ K, $F_\odot = \sigma T_e^4 \simeq 6.285 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. En una estrella roja se tiene típicamente $T_e \simeq 3000$ K, mientras que una estrella azul puede alcanzar $T_e \simeq 30,000$ K.

- La temperatura de color se define estimando la función de cuerpo negro que mejor ajusta a los datos en consideración, normalizando el ajuste al flujo total.

2.3.3. Ley de Kirchhoff y radiación térmica

La ley de Kirchhoff expresa el equilibrio entre los procesos de emisión y absorción,

$$j_\nu/\alpha_\nu = B_\nu(T). \quad (2.34)$$

Esta relación depende del equilibrio termodinámico del medio, independientemente de las características de la radiación interactuante. La ley de Kirchhoff define la *radiación térmica*, $S_\nu = B_\nu(T)$, que se puede generalizar a un medio fuera de equilibrio termodinámico, pero que puede ser descrito por distribuciones estadísticas de equilibrio termodinámico en cada punto. En ese caso se puede definir la temperatura localmente, $T(\vec{r})$, bajo el concepto de *equilibrio termodinámico local* (ETL = LTE, en inglés). En ETL la función fuente es la función de Planck evaluada en cada coordenada o a distinta profundidad óptica, $S_\nu = B_\nu(T(\vec{r})) \Leftrightarrow S_\nu = B_\nu(T(\tau_\nu))$.

Para radiación térmica en el régimen de Rayleigh-Jeans la ecuación de transferencia puede escribirse como,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T(\tau_\nu)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T. \quad (2.35)$$

La emisión térmica es la de cuerpo negro si $dI_\nu = 0$; este es el caso límite en medios ópticamente gruesos, $\tau_\nu \rightarrow \infty \Rightarrow I_\nu \rightarrow B_\nu$.

En un medio en estricto equilibrio termodinámico T es independiente de τ_ν , y la solución de la ecuación de transferencia se convierte en una relación entre la temperatura de brillo y la del medio,

$$T_b(\tau_\nu) = T_b(0) e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}).$$

De manera congruente con la solución más general, la temperatura de brillo tiende a la del medio en el caso ópticamente grueso.

2.4. Los coeficientes de Einstein

La relación entre los coeficientes de emisión y absorción establecida por Kirchhoff es manifestación de una relación fundamental independiente de la constitución del objeto, de sus condiciones físicas, o del equilibrio termodinámico a nivel microscópico la cual se expresa mediante los coeficientes introducidos por Einstein en 1916. Los *coeficientes de Einstein* describen procesos entre dos niveles de energía de un sistema cuántico: un nivel inferior 1 y un nivel superior 2, de energías E_1 y E_2 , pesos estadísticos g_1 y g_2 , y poblaciones n_1 y n_2 , respectivamente. Los procesos radiativos se dan

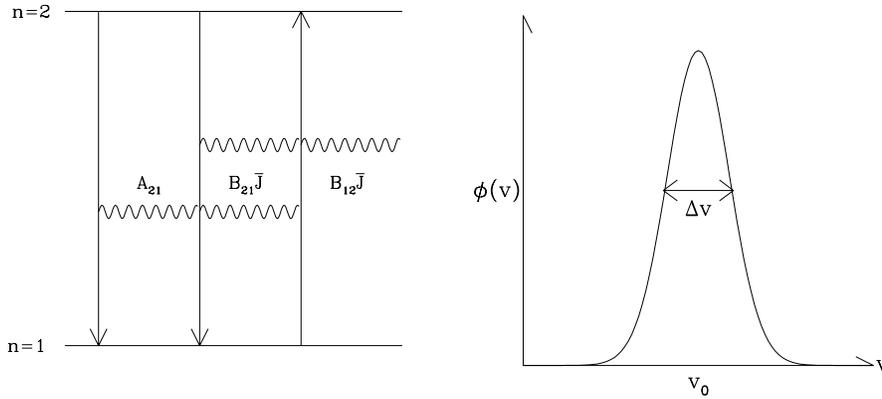


Figura 2.6: *Izquierda:* procesos de emisión espontánea, emisión inducida y absorción entre dos niveles de energía de un sistema. *Derecha:* función de probabilidad de que el sistema absorba o emita un fotón de frecuencia ν .

por transiciones entre los niveles debidas a la emisión o absorción de un fotón de energía $h\nu = E_2 - E_1$. De manera natural, el valor de la energía E_2 tiene una indeterminación descrita por una función $\phi(\nu)$, centrada en $\nu_0 = \Delta E/h$, que representa la probabilidad de emitir o absorber un fotón de energía $\nu \simeq \nu_0$ (figura 2.6). El ancho natural de esta función está dictado por el principio de indeterminación, $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, con Δt el tiempo típico de decaimiento desde el nivel n_2 . En la práctica varios procesos contribuyen a ensanchar más la función $\phi(\nu)$: por ejemplo, la distribución de velocidades de las partículas provoca un ensanchamiento $\Delta\nu \propto \nu_0 \sqrt{kT/mc^2}$, conocido como el efecto Doppler térmico. Los procesos fundamentales de interacción del sistema con la radiación son los de la ecuación de transferencia radiativa:

- **La emisión espontánea:** se caracteriza con el coeficiente A_{21} que cuantifica la probabilidad de transición por unidad de tiempo (s^{-1}).
- **La absorción:** se caracteriza con el coeficiente B_{12} y la intensidad media de la radiación, J_ν . La probabilidad de transición por absorción se expresa como $B_{12}\bar{J}_\nu$, pesando la intensidad media sobre la respuesta del sistema,

$$\bar{J}_\nu = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu .$$

- **La emisión estimulada:** se describe de manera análoga al proceso de absorción. La probabilidad de transición queda expresada en términos del coeficiente respectivo, $B_{21}\bar{J}_\nu$.

Se tiene un *equilibrio estadístico* cuando el número de transiciones $1 \rightarrow 2$ es igual al de transiciones $2 \rightarrow 1$, es decir

$$n_1 B_{12} \bar{J}_\nu = n_2 B_{21} \bar{J}_\nu + n_2 A_{21} \quad \Rightarrow \quad \bar{J}_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}, \quad (2.36)$$

siendo ésta la relación fundamental entre las poblaciones de los niveles y la intensidad de la radiación. En equilibrio termodinámico $\bar{J}_\nu = B_\nu$. Adicionalmente, en equilibrio termodinámico las poblaciones de los niveles se relacionan mediante la ley de Boltzmann,

$$n_1/n_2 = (g_1/g_2)e^{-(E_1-E_2)/kT}.$$

De donde, al considerar el equilibrio se obtienen las relaciones entre los coeficientes de Einstein:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}. \quad (2.37)$$

Estas son propiedades fundamentales de los sistemas cuánticos que revelan un enlace básico entre los procesos radiativos independiente de las poblaciones de los niveles energéticos. Las relaciones entre coeficientes de Einstein pueden emplearse fuera de equilibrio termodinámico, con los coeficientes de emisión y absorción dados por,

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) n_2 A_{21}, \quad \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}), \quad (2.38)$$

en lo que se conoce como *relaciones de balance detallado*. Los coeficientes j_ν y α_ν dependen de las poblaciones n_1 y n_2 . El cociente entre los coeficientes de emisión y absorción es la función fuente, que en el caso más general viene dada por,

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} = \frac{2h\nu^3/c^2}{n_1 g_2/n_2 g_1 - 1}. \quad (2.39)$$

Si las poblaciones están en equilibrio y, por ello, se ajustan a la ley de Boltzmann, tenemos emisión térmica, $S_\nu = B_\nu(T)$, para $\nu \sim \nu_0 = \Delta E/h$.

Un caso radicalmente fuera de equilibrio es el de un sistema con una sobrepoblación del nivel superior tal que $n_2 g_1 > n_1 g_2$. El coeficiente de absorción es entonces negativo y la radiación incidente es amplificada de manera exponencial, $I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{|\alpha_\nu|s}$, dando lugar al efecto *maser*. Esta emisión se observa en regiones con choques que provocan sobrepoblaciones de los niveles superiores muy distantes al equilibrio termodinámico.

2.5. Dispersión

El proceso de *dispersión*, o dispersión pura, (*scattering* en Inglés) consiste en la absorción momentánea seguida de la re-emisión isotrópica y coherente de radiación. El término coherente indica que la radiación incidente y la radiación dispersada tienen mismas características espectrales³. La dispersión se describe mediante el coeficiente respectivo, $\alpha_\nu^{(d)}$, tal que,

$$j_\nu^{(d)} = \alpha_\nu^{(d)} J_\nu , \quad (2.40)$$

con J_ν la intensidad media. En el caso particular de dispersión sin absorción y sin emisión espontánea tenemos $S_\nu = J_\nu$, y la ecuación,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu^{(d)} (I_\nu - J_\nu) . \quad (2.41)$$

Dado que J_ν es una integral de I_ν , la ecuación 2.41 resulta ser de tipo integro-diferencial. El término $\alpha_\nu^{(d)} I_\nu$ denota la fracción de radiación “interceptada” por el dispersor, la cual es re-emitida isotrópicamente a través del término $\alpha_\nu^{(d)} J_\nu$. Nótese que si $\alpha_\nu^{(d)}$ depende de ν , la distribución espectral observada cambia localmente varía con la ubicación, $I_\nu(s) \neq I_\nu(0)$, aunque no lo haga en promedio, $J_\nu(s) = J_\nu(0)$. Un ejemplo ilustrativo es el de la dispersión de luz solar en la atmósfera, o *dispersión de Rayleigh*: al ser el coeficiente de dispersión una función creciente de la frecuencia, $\alpha_\nu^{(d)} \propto \nu^4$, el disco solar se enrojece al dispersarse la componente azul y ultravioleta en la atmósfera.

Para radiación térmica podemos considerar la acción conjunta de dispersión, absorción y emisión espontánea, distinguiendo el coeficiente de absorción como $\alpha_\nu^{(a)}$. La ecuación de transferencia radiativa queda como:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = - \left(\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)} \right) (I_\nu - S_\nu) , \quad (2.42)$$

redefiniendo la función fuente como,

$$S_\nu \equiv \frac{\alpha_\nu^{(a)} B_\nu + \alpha_\nu^{(d)} J_\nu}{\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)}} , \quad (2.43)$$

tras validar la ley de Kirchhoff para la absorción, $j_\nu^{(a)} = \alpha_\nu^{(a)} B_\nu$. La emisión espontánea está contenida en el término $\alpha_\nu^{(a)} B_\nu$, mientras que la absorción

³Un caso distinto es el de dispersión Raman (Raman scattering), donde las frecuencias de absorción y re-emisión son distintas.

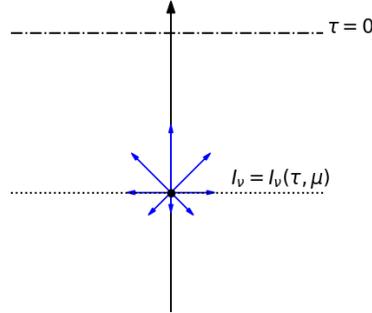


Figura 2.7: Geometría de una atmósfera plano paralela. La estratificación es vertical y cuantificada mediante τ , o también mediante z . La línea es a lo largo de $ds = (\pm)dz/\mu$, con $\mu = \cos \theta$.

pura es $\alpha_\nu^{(a)} I_\nu$, y los términos de dispersión son aquellos proporcionales a $\alpha_\nu^{(d)}$. A la suma de los coeficientes de dispersión y absorción, $\alpha_\nu^{(a)} + \alpha_\nu^{(d)}$, se le denomina *coeficiente de extinción*. Un ejemplo concreto de su uso es la caracterización de la extinción debida a la atmósfera terrestre en datos de fotometría o espectroscopía en el visible.

2.6. Atmósferas plano paralelas

Una atmósfera plano-paralela está estructurada a lo largo de una sola dirección, como se ilustra en la figura 2.7. Esta aproximación es útil para el estudio de atmósferas delgadas, mucho menores en dimensiones que el radio de curvatura del objeto. Las propiedades físicas de la atmósfera se consideran dependientes solamente de la coordenada z , la cual mide la profundidad física, o directamente de τ_ν , dada por $d\tau_\nu = \pm\alpha_\nu dz$. La intensidad de la radiación depende también del ángulo θ medido en relación al eje z , que muchas veces se reemplaza convenientemente por $\mu = \cos \theta$.

A continuación se presentan tres aplicaciones: la ecuación de difusión radiativa; la aproximación de Eddington, con la solución para una atmósfera gris; y una solución a la ecuación transferencia de energía radiativa en atmósferas plano-paralelas propuesta por Edouard Simonneau.

2.6.1. La ecuación de difusión radiativa

La ecuación de difusión radiativa se obtiene mediante la *aproximación de Rosseland*, que conduce a la relación entre el flujo de energía radiativa y el gradiente de temperatura de un medio. Suponemos el medio estratificado en la aproximación plano-paralela, de forma que sus propiedades físicas dependen únicamente de la coordenada, z . La intensidad de la radiación I_ν es

entonces función de z y de $\mu = \cos \theta$, siendo θ el ángulo entre la línea de visión y el eje \hat{z} . Usamos $ds = dz/\mu$, para escribir la ecuación de transferencia como:

$$\mu \frac{\partial I_\nu(z, \mu)}{\partial z} = -\alpha_\nu (I_\nu - S_\nu(z)), \quad (2.44)$$

donde $\alpha_\nu = \alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s$, considera los procesos de absorción y dispersión. El inverso de μ se denomina *masa de aire*. Podemos despejar I_ν ,

$$I_\nu = S_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial z} \right), \quad (2.45)$$

planteando una relación propicia para un proceso de iteración. A orden cero despreciamos el cambio de la intensidad con la profundidad, de donde,

$$I_\nu^{(0)}(z, \mu) = S_\nu^{(0)}(z).$$

Dado que $S_\nu^{(0)}$ no depende de μ , es isotrópica y $J_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)}$. Esto es válido en particular para un medio con emisión térmica, $S_\nu^{(0)} = B_\nu$. La aproximación de Rosseland consiste en suponer que la función fuente está dada por una superposición de funciones de Planck con $T = T(z)$. Substituyendo en la ecuación 2.45 obtenemos, a primer orden,

$$I_\nu^{(1)} = B_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu} \left(\frac{dB_\nu}{dz} \right). \quad (2.46)$$

Calculamos entonces el flujo de radiación,

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dz} = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \left(\frac{dB_\nu}{dT} \right) \frac{dT}{dz}. \quad (2.47)$$

Integrando sobre frecuencias obtenemos la ecuación de difusión radiativa,

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{dT}{dz}, \quad (2.48)$$

donde, aprovechando las propiedades de la función de Planck, definimos la opacidad de Rosseland,

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s} \right) \left(\frac{dB_\nu}{dT} \right) d\nu \right] / \left[\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right]. \quad (2.49)$$

La ecuación de difusión radiativa describe el flujo de energía originado por un gradiente de temperatura. Esta relación es de particular relevancia en la descripción de interiores estelares.

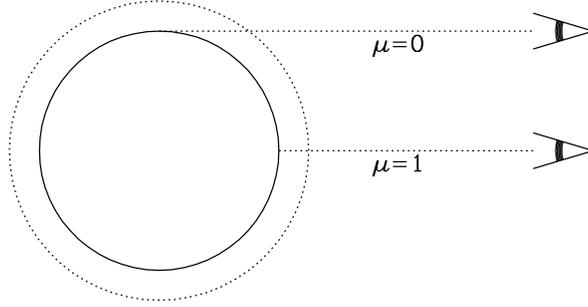


Figura 2.8: Rayos de luz provenientes del disco o del limbo solar.

2.6.2. Aproximación de Eddington y atmósfera gris

La aproximación de Eddington propone un flujo semi-isotrópico para el análisis de atmósferas, permitiendo describir la intensidad como una función lineal de μ ,

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = a_\nu(\tau_\nu) + \mu b_\nu(\tau_\nu), \quad (2.50)$$

donde $d\tau_\nu = \alpha_\nu dz$, la profundidad óptica de la atmósfera medida a lo largo de la vertical. Las funciones $a_\nu(\tau_\nu)$ y $b_\nu(\tau_\nu)$ se relacionan con los momentos de la intensidad específica, es decir la intensidad media, el flujo de radiación y su presión

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu = \frac{c}{4\pi} u_\nu = a_\nu, & F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu d\mu = \frac{4\pi}{3} b_\nu, \\ p_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3} \frac{a_\nu}{c}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

En particular se tiene que campos semi-isotrópicos de radiación cumplen la misma relación entre densidad y presión que los campos isotrópicos,

$$p_\nu = \frac{1}{3} u_\nu. \quad (2.52)$$

Al substituir la aproximación (2.50) en la ecuación de transferencia radiativa, $\mu(\partial I_\nu / \partial \tau_\nu) = I_\nu - S_\nu$, podemos relacionar las funciones a_ν y b_ν con S_ν .

Entre las aplicaciones más conocidas de la aproximación de Eddington está la atmósfera gris, donde la opacidad es independiente de la frecuencia, $\tau_\nu = \tau$. Se integra sobre ν para trabajar con las funciones $a_\nu \rightarrow a$, $b_\nu \rightarrow b$ integradas, y $S = B = (\sigma/\pi)T^4$ para un medio térmico. Podemos relacionar $T = T(\tau)$ con la temperatura efectiva bajo la condición de un flujo solamente emergente, $F^+ = \sigma T_e^4$, en la frontera externa de la atmósfera, $\tau = 0$. De

esta forma se obtiene

$$I(\tau, \mu) = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\mu + \tau + \frac{2}{3} \right), \quad T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (2.53)$$

con $T(0) = (1/2)^{1/4} T_e \simeq 0.841 T_e$, y $T(\tau) = T_e$ en $\tau = 2/3$.

La expresión completa para la intensidad (2.53) contiene la ley de oscurecimiento al limbo,

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right). \quad (2.54)$$

En las aproximaciones de Eddington y de atmósfera gris se obtiene que la intensidad de la radiación observada en el limbo debe ser 0.4 veces la del centro del disco (figura 2.8).

2.6.3. La solución de Simonneau para el espectro de una atmósfera plano-paralela

Edouard Simonneau propuso un tratamiento para estimar el espectro emergente de una atmósfera estelar, dado el coeficiente de opacidad en función de la longitud de onda⁴, κ_λ . Para $\tau_\lambda \gg 1$, la ecuación de transferencia en el caso térmico puede escribirse como,

$$\mu \frac{\partial I_\lambda}{\partial \tau_\lambda} = I_\lambda - B_\lambda(T(\tau_\lambda)). \quad (2.55)$$

La podemos aproximar mediante,

$$I_\lambda = B_\lambda + \mu \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}.$$

Proponemos entonces para la intensidad en la superficie ($\tau_\lambda = 0$)

$$I_\lambda(0, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mu < 0 \\ B_\lambda(0) + \mu [dB_\lambda/d\tau_\lambda]_0 & \text{para } \mu \geq 0 \end{cases}. \quad (2.56)$$

Calculamos el flujo en la superficie,

$$F_\lambda(0) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\lambda \mu d\mu = \pi B_\lambda(0) + \frac{2\pi}{3} \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}(0). \quad (2.57)$$

Nótese que en una atmósfera plano-paralela el flujo integrado es constante, es decir independiente⁵ de z .

⁴siguiendo el tratamiento original de Simonneau (1981), uso λ en vez de ν .

⁵el flujo integrado es aproximadamente constante para una atmósfera delgada en una simetría esférica.

Procedemos a integrar 2.57 sobre λ , tomando en cuenta las definiciones de opacidad media de Rosseland (ec. 2.49) y de Planck,

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{B(T)} \int_0^\infty \alpha_\lambda B_\lambda d\lambda. \quad (2.58)$$

Empleando la relación entre flujo y temperatura efectiva, $F = \sigma T_e^4$; y entre la integral de la Planckiana y la temperatura inicial, $B(T_0) = (\sigma/\pi)T_0^4$, con $T_0 = T(0)$, se obtiene:

$$F = \pi B(0) + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_R} \right) B(0) \quad \Rightarrow \quad T_0^4 = \frac{T_e^4}{1 + 4\alpha_p/3\alpha_R}. \quad (2.59)$$

Podemos ahora calcular la temperatura física en la superficie, $\tau = 0$, en función de la temperatura efectiva, siempre y cuando podamos determinar $\alpha_p(\rho, T)$ y $\alpha_R(\rho, T)$. En el caso de una atmósfera gris, $\alpha_\lambda = \text{cte}$, tenemos $\alpha_p = \alpha_R$, de donde $T_0 = (3/7)^{1/4} T_e \simeq 0.8091 T_e$. Esta expresión concuerda más con la solución exacta, $T_0 \simeq 0.8112 T_e$, que la solución de Eddington.

Conocida la temperatura al borde de la atmósfera, es posible deducir el espectro emergente (ec. 2.57) evaluando la Planckiana y su derivada:

$$F_\lambda = \pi B_\lambda(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha_p}{3\alpha_\lambda} \left(\frac{e^{hc/\lambda k T_0}}{e^{hc/\lambda k T_0} - 1} \right) \frac{hc}{\lambda k T_0} \right\}. \quad (2.60)$$

En el régimen de Rayleigh-Jeans ($\lambda \gg hc/kT_0$),

$$F_\lambda \approx \pi B_\lambda(0) (1 + \alpha_p/3\alpha_\lambda),$$

coincidiendo el flujo con un cuerpo negro donde el medio es opaco, $\alpha_\lambda \gg \alpha_p$. En la región de Wien ($\lambda \ll hc/kT_0$), comúnmente situada en el ultravioleta,

$$F_\lambda \approx \pi B_\lambda(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha_p}{3\alpha_\lambda} \left(\frac{hc}{\lambda k T_0} \right) \right\},$$

siendo $F_\lambda \propto B_\lambda(0)/\alpha_\lambda$ para $\alpha_\lambda \ll \alpha_p$. El cálculo preciso del espectro dado por 2.60 requiere conocer la forma funcional de α_λ .