Procesos radiativos
Capítulo 4: Teoría clásica de procesos radiativos

Alberto Carramiñana
INAOE

Tonantzintla, 14 de noviembre de 2024

Teoría clásica de procesos radiativos

4.1. Elementos de relatividad especial

4.2. Campos de una carga en movimiento

4.3. Sistemas de cargas

4.4. Bremsstrahlung

4.5. Radiación sincrotrón

4.6. El efecto Compton

4.7. Procesos fotón - electrón a altas energías

4.1. Elementos de relatividad especial

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia.
4.1.2. Postulados.
4.1.3. Transformaciones de Lorentz.
4.1.4. Consecuencias.
4.1.5. Cuadrivectores.
4.1.6. Fotones y luz.
4.1.7. Campos electromagnéticos.

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia

- En un sistema de referencia inercial es válida la ley de la inercia (1ª ley de Newton):

  En ausencia de fuerzas externas un objeto mantiene un estado de movimiento rectilíneo uniforme.

- Sea O un observador en un sistema de referencia inercial describiendo el movimiento de una partícula con coordenadas, $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$.
- Sea O' un observador que se mueve con velocidad $\vec{v}$ relativa a O y que mide $\vec{r'}(t) = x'(t)\,\hat{x} + y'(t)\,\hat{y} + z'(t)\,\hat{z}$, con la misma orientación de los ejes.
- La transformación entre sistemas de coordenadas en **mecánica clásica** es la de Galileo,

$$\vec{r}(t) = \vec{r'}(t) + \vec{v}t. \tag{1}$$

  que relaciona ambos sistemas cumpliendo con el principio de inercia.
- La transformación inversa tiene misma forma. Se obtiene de despejar (2), o al invertir el signo de la velocidad,

$$\vec{r'}(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t, \tag{2}$$

4.1.1. Sistemas inerciales de referencia - transformaciones de Galileo

- En mecánica Newtoniana las velocidades son aditivas:
  si $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de una partícula vista por O, la relación entre la velocidad de la partícula medida por ambos observadores, $\vec{u}$ y $\vec{u'}$, es,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r'} + \vec{v}t')}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{v}\,\frac{dt'}{dt}. \tag{3}$$

- Al suponer la **invariancia del tiempo**, implícita en las transformaciones de Galileo (2), se obtiene la **invariancia espacial**,

$$dt' = dt \quad \Rightarrow \quad dr' = dr\,, \tag{4}$$

  y la adición de velocidades,

$$\vec{u} = \vec{u'} + \vec{v}\,. \tag{5}$$

- Las transformaciones entre sistemas de coordenadas son: desplazamiento del origen de coordenadas, rotaciones de los ejes de coordenadas y movimientos a velocidad constante.

4.1.2. Postulados de la relatividad

La teoría especial de la relatividad se fundamenta en dos postulados:

1. Las leyes de la física tienen la misma forma en todo marco de referencia inercial.
2. La velocidad de la luz es constante y su valor es independiente del marco de referencia elegido.

- El postulado 1 indica que *las leyes de la física* mantienen una misma forma en todo marco de referencia inercial.
  - Alrededor de 1900 se pensaba que las ecuaciones de Maxwell, que predicen la propagación de la luz con velocidad c, eran válidas sólo en reposo con respecto al *éter*, el cual definía un marco de referencia privilegiado.
- El postulado 2 establece la velocidad de la luz como una cantidad invariante, en conflicto con invariancias separadas de tiempo y distancia.
  - Ha sido comprobado experimentalmente, de forma que el valor de la velocidad de la luz se define de forma *exacta*,

$$c \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}\ , \tag{6}$$

y el metro se define a partir del segundo.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- La constancia de la velocidad de la luz en todo sistema de referencia inercial,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 \;=\; dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \;= 0\,. \tag{7}$$

- Para ejes con misma orientación y movimiento relativo sobre $\hat{x}$, se propone una transformación lineal,

$$ct' = A\,ct + B\,x\,, \quad x' = D\,ct + E\,x\,.$$

- Al combinar con (7) se llega a la expresión básica de la transformación de Lorentz,

$$\left\{ \begin{array}{lll} ct' & = \quad \gamma \;\; ct - \gamma\beta\,x & = \gamma\,(ct - v\,x/c)\;, \\ x' & = -\gamma\beta\,ct + \gamma \;\; x & = \gamma\,(x - v\,t)\;, \end{array} \right. \tag{8}$$

  con $v = \beta c$. El *factor de Lorentz* queda definido por la condición,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{9}$$

- El factor γ es creciente con $|\beta|$: $\gamma = 1$ para $\beta = 0$; $\gamma \to \infty$ para $\beta \to \pm 1$.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- La relatividad emplea **eventos** definidos por coordenadas de **tiempo y posición**.
- **Principio de invariancia**: las transformaciones de Lorentz preservan la forma del *intervalo* entre eventos, $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- Las transformaciones de Lorentz forman un grupo que se puede representar con matrices de 4×4 que incluye:

- traslaciones fijas = cambio de origen de coordenadas;
- rotaciones del sistema de coordenadas $\rightarrow$ $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ invariante;
- translaciones a velocidad constante (*boost*);
- inversiones espaciales o temporales, sin significado físico.

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- Transformación para un movimiento rectilíneo uniforme sobre los tres ejes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\Lambda(y) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(z) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

- La transformación para $\vec{v} = \vec{\beta}c$ entre dos sistemas con *ejes paralelos*,

$$ct' = \gamma ct - \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{r}\,, \quad \vec{r'} = -\gamma\vec{\beta}ct + \vec{r} + (\gamma - 1)\,(\hat{\beta}\cdot\vec{r})\hat{\beta}\,. \tag{11}$$

4.1.3. Transformaciones de Lorentz

- **Inversa:** toda transformación tiene una inversa única. Empleando notación matricial y omitiendo (y, z), la transformación inversa de (10) es,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} .$$

  - La inversa se obtiene reemplazando $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$.
- **Suma:** Al combinar dos transformaciones paralelas, con $v_1 = \beta_1 c$, $v_2 = \beta_2 c$, se obtiene una transformación con

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} ,$$

  que satisface $|\beta| < 1$ para $|\beta_1|$, $|\beta_2| < 1$.
- Transformaciones más complejas combinan rotaciones y movimientos rectilíneos, notando con precaución que el grupo de Lorentz no es conmutativo.

4.1.4. Consecuencias

- **Simultaneidad:**
  para O los eventos $(t_1 = 0, x_1 = 0)$ & $(t_2 = 0, x_2 = X)$ son simultáneos $(t_1 = t_2)$. En O' estos eventos no son simultáneos. El primer evento se transforma de forma trivial en $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$, mientras que,
  $$\begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_2 = 0 \\ x_2 = X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\beta X \\ \gamma X \end{pmatrix}$$
  es decir $t'_2 = -\gamma\beta\, X/c \neq t'_1 = 0$. La simultaneidad depende del observador.
- **Dilatación temporal:**
  dos eventos distintos en un mismo punto, $(t_1 = 0, x_1 = 0)$ & $(t_2 = T, x_2 = 0)$, para O. En O' los mismos eventos: $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$ & $(t'_2 = \gamma T, x'_2 = -\gamma\beta c T)$. La dilatación temporal radica en $t'_2 - t'_1 \geq T$. El lapso de tiempo entre dos eventos es mínimo en el marco de referencia en el cual los eventos suceden en el mismo punto. Se define el *tiempo propio* como aquel transcurrido en el marco de referencia donde la separación entre eventos es puramente temporal.

4.1.4. Consecuencias

- **Contracción espacial:**
  La medición de una barra de longitud L que realiza O puede describirse con los eventos $(t_1 = 0,\, x_1 = 0)$, $(t_2 = 0,\, x_2 = L)$.
  - O' registra estos eventos en $(t'_1 = 0,\, x'_1 = 0)$, $(t'_2 = -\gamma\beta\, L/c,\, x'_2 = \gamma\, L)$. Si $L' = x'_2 - x'_1 \geq L$, parecería una expansión, no una contracción...
  -
  -
  -

4.1.5. Cuadrivectores - eventos

- La relatividad generaliza la mecánica de Newton introduciendo **cuadrivectores**, generalización de vectores espaciales que incorporan la componente temporal.
- La invariancia de la velocidad de la luz se introduce en la construcción de los cuadrivectores.
- El cuadrivector básico ubica un evento en el espacio y tiempo,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

  abreviadas x^α, con $\alpha = 0$ para la componente temporal, $\alpha \to \jmath = \{1, 2, 3\}$ para las componentes espaciales.
- De forma explícita, el cuadrivector de tiempo y posición está dado por,

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

4.1.5. **Cuadrivectores** - intervalos; tensor de Minkowski

- Se define el intervalo entre dos eventos,

$$\Delta s^2 \equiv -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 . \tag{13}$$

  - *La propagación de la luz* cumple $\Delta s = 0$, en todo marco de referencia.
  - Eventos conectados causalmente cumplen $\Delta s^2 \leq 0$.
- La relación (13) se puede re-escribir definiendo el **tensor de Minkowski**, escrito en coordenadas cartesianas como,

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) = \eta^{\alpha\beta} . \tag{14}$$

  - En forma diferencial, e introduciendo la convención de sumatorias implícitas,

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta \quad \Rightarrow \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta . \tag{15}$$

4.1.5. Cuadrivectores - sumatorias implícitas

- La **convención de sumatoria sobre índices repetidos** (15), permite convertir cuadrivectores *contravariantes* en *covariantes*, empleando el tensor de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta}\, A^{\alpha} \equiv \eta_{0\beta}\, A^{0} + \eta_{1\beta}\, A^{1} + \eta_{2\beta}\, A^{2} + \eta_{3\beta}\, A^{3} = A_{\beta}\,, \tag{16}$$

es decir

$$A_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} A^{\alpha} = \left(-A^{0}, \vec{A}\right) \quad \Rightarrow \quad A_{0} = -A^{0},\ A_{\jmath} = A^{\jmath} \qquad \text{con } \jmath = \{1, 2, 3\}.$$

- **<u>En general:</u>**

- Cuadrivectores **contravariantes**, A^{α} con super-índice, son aquellos que se transforman siguiendo,

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\, A^{\beta}. \tag{17}$$

- Cuadrivectores **covariantes**, A_{α} con sub-índice, se transforman siguiendo,

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}\, A_{\beta}. \tag{18}$$

4.1.5. **Cuadrivectores** - espacio, producto escalar, norma

- Cuadrivectores covariantes y contravariantes forman un espacio dual.
- Se generaliza el producto escalar entre cuadrivectores,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_\alpha B^\alpha = \eta_{\alpha\sigma}A^\sigma B^\alpha = -A^0B^0 + \vec{A}\cdot\vec{B} = \mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}',$$

  con $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}'$, invariante para cuadrivectores, transformados de acuerdo a (17,18), por definición.
- Se tiene definida la "norma" de cada cuadrivector,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_\alpha A^\alpha = -(A^0)^2 + \vec{A}\cdot\vec{A},$$

  invariante ante transformaciones.
- La construcción de cuadrivectores representando entidades físicas en relatividad se hace empleado el **tiempo propio**, definido a partir del intervalo s.

4.1.5. Cuadrivectores - transformación de cuadrivectores

- Las transformaciones de un cuadrivector A^α (contravariante) entre dos sistemas con ejes paralelos están dadas por

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma A^0 - \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A} \\ \vec{A'} = -\gamma\vec{\beta}A^0 + \vec{A} + (\gamma-1)\,(\hat{\beta}\cdot\vec{A})\hat{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^0 = \gamma A'^0 + \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A'}, \\ \vec{A} = \gamma\vec{\beta}A'^0 + \vec{A'} + (\gamma-1)\,(\hat{\beta}\cdot\vec{A'})\hat{\beta}. \end{cases} \tag{19}$$

- Separando el vector $\vec{A}$ en componentes perpendicular y paralela a $\vec{\beta}$,

$$\vec{A} = \vec{A}_\parallel + \vec{A}_\perp, \quad \text{con} \quad \vec{A}_\parallel = (\hat{\beta}\cdot\vec{A})\hat{\beta}, \quad \vec{A}_\perp = \hat{\beta}\times(\vec{A}\times\hat{\beta}),$$

se tiene que la parte espacial de (19) se puede escribir como,

$$\vec{A'} = -\gamma\vec{\beta}A^0 + \gamma A_\parallel\hat{\beta} + \vec{A}_\perp,$$

es decir

$$A'^0 = \gamma A^0 - \gamma\beta A_\parallel\,, \quad \vec{A'}_\parallel = -\gamma\vec{\beta}A^0 + \gamma\vec{A}_\parallel, \quad \vec{A'}_\perp = \vec{A}_\perp\,. \tag{20}$$

4.1.5. Cuadrivectores - tiempo propio, velocidad, aceleración

- Se define el **tiempo propio**, τ, a partir del intervalo s,

$$d\tau \equiv \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)} = \frac{dt}{\gamma}\,. \tag{23}$$

  El tiempo propio es un *escalar* invariante, independiente del marco de referencia.
- Se construyen cuadrivectores derivando sobre $d\tau$. Así el cuadrivector de velocidad,

$$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma\, c \\ \gamma\, \vec{v} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

  de norma $u_\alpha u^\alpha = -c^2$, invariante.
- La derivada del cuadrivector de velocidad es el cuadrivector de aceleración,

$$a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma\, c\, d\gamma/dt \\ \gamma\, d(\gamma\vec{v})/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4\, \vec{a}\cdot\vec{v}/c \\ \gamma^2\, \vec{a} + \gamma^4\left(\vec{a}\cdot\vec{v}\right)\vec{v}/c^2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

  La norma $a_\alpha a^\alpha$, invariante, es igual al cuadrado de la aceleración en el marco de referencia (instantáneo) de la partícula (acelerada).

4.1.5. Cuadrivectores - energía y momento

- El cuadrivector de energía-momento se define para una partícula de masa m como,

$$p^\alpha \equiv mu^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

generalizando el momento de una partícula $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, y su energía.

- La energía de la partícula, $E = \gamma mc^2$, tiene la parte en reposo, $E_0 = mc^2$, y la cinética, $E_c = (\gamma - 1)mc^2$,

$$E = E_0 + E_c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \dots \tag{27}$$

- La norma del cuadrivector de energía-momento, es

$$p_\alpha p^\alpha = -E^2/c^2 + p^2 = -m^2c^2 \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}\,. \tag{28}$$

4.1.5. Cuadrivectores - potencia y fuerza

- La generalización de la mecánica de Newton se hace con cuadrivectores de fuerza que describen interacciones de forma similar a la segunda ley de Newton,

$$\mathcal{F}^\mu = ma^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}\,. \tag{29}$$

- La aceleración (25) puede separarse en componentes paralela y perpendicular a la velocidad, $\vec{a} = a_\parallel \hat{v} + \vec{a}_\perp$, donde

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \quad \text{con} \quad \vec{a}_\parallel \equiv (\vec{a}\cdot\hat{v})\,\hat{v}, \quad \vec{a}_\perp \equiv \hat{v}\times(\vec{a}\times\hat{v})\,. \tag{30}$$

  para obtener de (29),

$$\frac{dE}{dt} = \gamma^3 m\vec{a}\cdot\vec{v}\,, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma^3 m\vec{a}_\parallel + \gamma m\vec{a}_\perp\,, \tag{31}$$

- La componente paralela a la velocidad cambia la energía ("hace trabajo"), siendo más difícil acelerar una partícula linealmente que de forma perpendicular.

4.1.6. Luz y fotones

- La expresión de la derecha en (26) se generaliza a partículas sin masa, como el fotón, donde $E^2 = p^2c^2$.
- El fotón tiene asociado el cuadrivector de energía-momento,

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hbar k^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega/c \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

  con $\vec{k} = (\omega/c)\hat{k}$ el vector de propagación.
- La norma nula para la propagación de la luz en el vacío equivale a la relación de dispersión,

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \;\Rightarrow\; -\omega^2 + k^2c^2 = 0\,,$$

  acorde con masa nula y propagación en intervalos nulos, $ds = 0$.

4.1.6. Luz y fotones

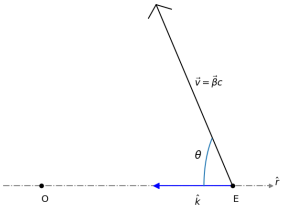


Figura 1: Un emisor de luz E se mueve con velocidad $\vec{v} = \vec{\beta}c$ con respecto al observador O, siendo $\hat{k}$ el vector de E a O, inverso a la línea de visión.

- Sea E un emisor de radiación con velocidad $\vec{v} = \vec{\beta}c$, emitiendo con una frecuencia ω_e en la dirección $\hat{k}_e$ (fig. 1). La relación entre frecuencias observada y emitida está dada por la transformación inversa a (19),

$$\omega_o = \gamma\omega_e\left(1 + \vec{\beta}\cdot\hat{k}_e\right) = \frac{\omega_e}{\gamma\left(1 - \vec{\beta}\cdot\hat{k}_o\right)} \tag{33}$$

- La transformación del vector de propagación es la directa,

$$\hat{k}_e = \frac{\hat{k}_o - \gamma\vec{\beta} + (\gamma - 1)\left(\hat{\beta}\cdot\hat{k}_o\right)\hat{\beta}}{\gamma\left(1 - \vec{\beta}\cdot\hat{k}_o\right)} \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta}\cdot\hat{k}_e = \cos\theta_e = \frac{\cos\theta_o - \beta}{1 - \beta\cos\theta_o}\,. \tag{34}$$

4.1.6. Luz y fotones - efecto Doppler

- fuente alejándose en movimiento radial, $\hat{\beta} \cdot \hat{k}_o = -1$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma(1+\beta)} = \omega_e \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \cos\theta_e = -1\,. \tag{35}$$

  La frecuencia observada es menor y corresponde al *corrimiento al rojo*.
- fuente acercándose en movimiento radial, $\cos\theta_o = +1$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma(1-\beta)} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \qquad \cos\theta_e = +1\,. \tag{36}$$

  La frecuencia observada es mayor y corresponde al *corrimiento al azul*.
- fuente moviéndose perpendicularmente, $\cos\theta_o = 0$:

$$\omega_o = \frac{\omega_e}{\gamma}, \qquad \cos\theta_e = -\beta\,. \tag{37}$$

  Corrimiento transverso al rojo. Ángulo de emisión observado $\theta_e \neq \theta_o$.

4.1.6. Luz y fotones - beaming

- De acuerdo a (34), el ángulo observado no coincide con el de emisión en el marco de la fuente,

$$\cos\theta_o = \frac{\beta + \cos\theta_e}{1 + \beta\cos\theta_e}\,. \tag{38}$$

- Una fuente de radiación isotrópica, independiente de θ_e, se observa anisotrópica al estar en movimiento, emitiendo en un ángulo sólido dado por,

$$d\Omega_o = 2\pi\, d(\cos\theta_o) = \frac{d\Omega_e}{\gamma^2(1 + \beta\cos\theta_e)^2}\,. \tag{39}$$

- El haz se cierra y se intensifica en la dirección de movimiento, además del corrimiento al azul, dando lugar a una fuerte amplificación de la intensidad $\rightarrow$ "beaming".

4.1.6. Luz y fotones - beaming

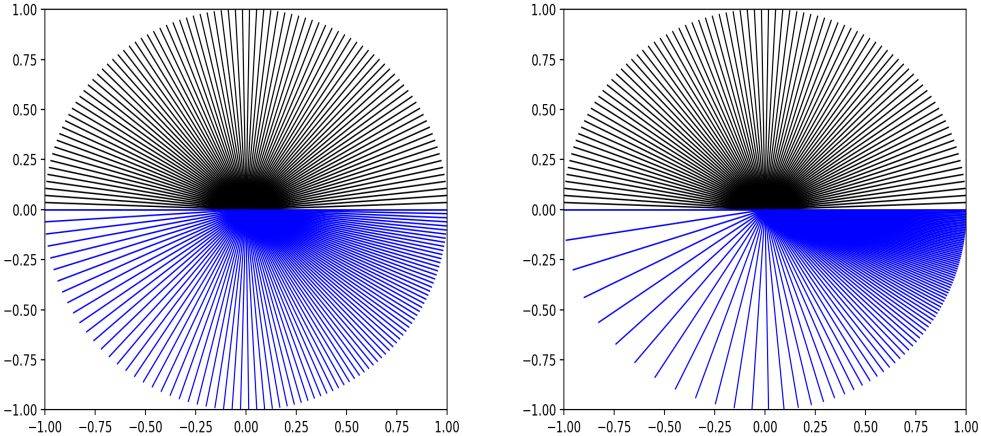


Figura 2: Modificación de un patrón isotrópico, arriba en negro para $\beta = 0.5$ y $\beta = 0.9$. El patrón modificado aparece abajo en azul.

4.1.7. Campos electromagnéticos - potenciales

- Los campos electromagnéticos pueden derivarse del potencial escalar, ϕ, y el vectorial, $\vec{A}$, combinados en el cuadrivector,

$$A^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} . \tag{40}$$

- El operador (covariante) de derivación se define como,

$$\partial_\alpha \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} , \nabla \right) , \tag{41}$$

  permitiendo expresar ecuaciones de conservación y de onda de forma compacta.
- Un primer ejemplo es la forma invariante de norma de Lorenz[1],

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 . \tag{42}$$

  Los potenciales que la cumplen lo hacen en cualquier marco de referencia. En cambio, la norma de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, no es invariante.

[1] por Ludvig Lorenz, físico anterior a Hendrik Lorentz.

4.1.7. Campos electromagnéticos - carga y corriente

- Las fuentes de los potenciales y campos electromagnéticos son las cargas y corrientes eléctrica, con densidades,

$$\jmath^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \rho\, c \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

- La ecuación de continuidad se puede expresar en forma covariante,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\jmath} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \jmath^\alpha = 0\,. \tag{44}$$

- Las ecuaciones de Maxwell dan lugar a ecuaciones de onda para los potenciales en presencia de fuentes,

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -\frac{4\pi}{c}\jmath^\alpha \iff \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

- En §4.2 se plantean estas ecuaciones para una carga en movimiento arbitrario.

4.1.7. Campos electromagnéticos - tensores

- La descripción de campos electromagnéticos requiere el empleo de tensores:
  - Un tensor de rango 0 es un escalar. Es invariante por construcción.
  - Un tensor de rango 1 es un cuadrivector. Se transforma de forma contravariante o covariante (17,18),

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} , \quad A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} A_{\beta} .$$

  - Los tensores de rango 2 se representan con matrices de 4×4. Pueden ser contravariantes, transformándose de acuerdo a,

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} . \tag{46}$$

    covariantes, o mixtos, transformándose de acuerdo a,

$$F'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} F^{\gamma}_{\delta} . \tag{47}$$

- De forma similar se puede construir tensores de rango arbitrario...

4.1.7. Campos electromagnéticos - tensor de campo EM

- Los campos electromagnéticos se definen como un tensor de segundo rango,

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \end{cases} \tag{48}$$

explícitamente,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

- El tensor F es antisimétrico por construcción: $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.
  - En particular $F^{\alpha\alpha} = 0$.

4.1.7. Campos electromagnéticos - ecuaciones de Maxwell

- Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse de forma covariante,

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \jmath^\alpha \,, \quad \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \,. \tag{50}$$

- La expresión de la izquierda corresponde a las ecuaciones de Maxwell con fuentes,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}.$$

- La expresión de la derecha en (50) se anula cuando hay índices repetidos. Para índices distintos entre sí,

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \{123\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \{\alpha\beta\gamma\} \in \left\{ \begin{array}{c} \{012\} \\ \{013\} \\ \{023\} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

- La definición del tensor $F^{\alpha\beta}$, junto con la ecuación (50) con fuentes, permite obtener la ecuación de onda para los potenciales electromagnéticos (45).

4.1.7. Campos electromagnéticos - transformación

- El campo electromagnético se trasforma según $F^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{\beta}_{\mu}F'^{\gamma\mu}$, de donde,

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \qquad \vec{E}_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}'_{\perp}\right),$$
$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \qquad \vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}'_{\perp}\right). \tag{51}$$

  - Un campo puramente eléctrico ($\vec{B}' = 0$) o magnético ($\vec{E}' = 0$) se transforma en electromagnético ($\vec{B} \neq 0$, $\vec{E} \neq 0$).
- El invariante $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$ indica la existencia de un marco de referencia donde uno de los dos campos, $\vec{E}$ o $\vec{B}$, es nulo.
  - Para ondas EM: $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$.
- Se puede definir **el tensor de energía-momento** del campo EM, el cual contiene al vector de Poynting[2].

[2] "The Classical Theory of Fields", Landau & Lifshitz, §23 a §33.

4.1.7. Campos electromagnéticos - fuerza de Lorentz

- La *fuerza de Lorentz* es producto del tensor de campo electromagnético y el cuadrivector de velocidad,

$$\mathcal{F}^{\alpha} = (q/c) F^{\alpha}_{\ \beta}\, u^{\beta} = (q/c) F^{\alpha\mu} u_{\mu}\,. \tag{52}$$

- Con un poco de álgebra se obtiene de (29),

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m c^2\right) = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\gamma m \vec{v}\right) = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\,. \tag{53}$$

A la izquierda es el cambio de energía por el trabajo del campo eléctrico; a la derecha la fuerza de Lorentz, con factor γ.

4.2. Campos de una carga en movimiento

4.2.1. Carga en reposo y en movimiento rectilíneo uniforme.
4.2.2. Potenciales de Liénard-Wiechert.
4.2.3. Fórmula de Larmor y distribución angular de la radiación.
4.2.4. Distribución espectral.

4.2.1. Carga en reposo

- La densidad de carga de un electrón, $q = -e$, en reposo en la posición $\vec{r}_e$, es

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_e), \quad \vec{j} = 0.$$

- El potencial escalar se obtiene de la ecuación de Poisson, (45) con $\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})$,

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho\,. \tag{55}$$

- Cambio de variable $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e$ fija el origen en la carga. En coordenadas esféricas,

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{R}) = \rho(R) = -e\,\delta(R)/R^2,$$

- Se integra (55) sobre una esfera de radio $a(> 0)$,

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\phi}{dR}\right) = 4\pi e\frac{\delta(R)}{R^2} \quad \Rightarrow \quad a^2\frac{d\phi}{dR}(a) = 4\pi e\,.$$

- Al integrar sobre a se obtiene el potencial y el campo de Coulomb,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{-e}{R} = \frac{-e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|},\ \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -e\frac{\hat{R}}{R^2} = -e\,\frac{\vec{r} - \vec{r}_e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|^3},\ \vec{B} = 0\,. \tag{56}$$

4.2.1. Carga en movimiento rectilíneo uniforme

- Un electrón en movimiento rectilíneo uniforme, $\vec{r}_e(t) = \hat{x} v_e t$, $y_e = z_e = 0$.
- En el marco propio del electrón los potenciales son de Coulomb (56),

$$\phi'(\vec{r}') = \frac{-e}{|\vec{r}' - \vec{r}_e'|} = \frac{-e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,, \quad \vec{A}' = 0 \quad \text{para} \quad \vec{r}_e' = 0\,.$$

- Se transforman de acuerdo a (19),

$$\phi = \gamma\phi' + \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A}' = \gamma\phi'\,, \quad \vec{A} = \gamma\vec{\beta}\phi' + \vec{A}' + (\gamma - 1)\,(\hat{\beta}\cdot\vec{A}')\hat{\beta} = \gamma\beta\hat{x}\,\phi'\,,$$

es decir,

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{-e\,\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - v_e t)^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{-e\,\gamma v_e\,\hat{x}\,/c}{\sqrt{\gamma^2(x - v_e t)^2 + y^2 + z^2}}\,, \tag{57}$$

transformando también las coordenadas, $x' = \gamma(x - v_e t)$, $y' = y$, $z' = z$.

4.2.1. Carga en movimiento rectilíneo uniforme

- Los campos electromagnéticos se derivan de estos potenciales.
- Alternativamente, se pueden obtener los campos con las transformaciones (56),

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}'_{\perp} \,,$$

aplicadas a un campo de Coulomb.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- El campo electromagnético producido por una carga en movimiento arbitrario se obtiene de las ecuaciones (50), dadas las formas funcionales de $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$.
- Para un electrón que sigue una trayectoria arbitraria $\vec{r}_e(t)$,

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\ \delta\left[\vec{r} - \vec{r}_e(t)\right] , \quad \vec{\jmath}(\vec{r}, t) = -e\, \vec{v}_e(t)\, \delta\left[\vec{r} - \vec{r}_e(t)\right] , \tag{58}$$

  con $\delta(\vec{r})$ la función delta de Dirac.
- Los potenciales A^α se pueden obtener integrando la ecuación de onda (45) mediante el método de la función de Green[3].
- Alternativamente, se puede hacer una deducción aprovechando invariantes (Shu §13).

[3] Jackson §12.11 y capítulo 14 muestran la deducción mediante la función de Green.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

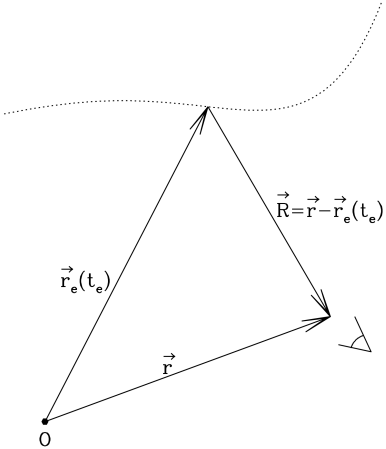


Figura 3: Electrón en movimiento arbitrario visto desde el marco de referencia O. El vector $\vec{r}$ denota la posición donde se mide el campo en el instante t, frecuentemente fija, y $\vec{r}_e(t_e)$ la del electrón en el instante t_e. El vector $\vec{R}$ conecta ambos eventos.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- El potencial es Coulombiano en un marco O′ en reposo instantáneo con el electrón.
- Se hace la transformación al observador (O), considerando la posición del electrón en un instante t'_e, distinto al tiempo de la medición, t' (fig. 3).
- Así, consideramos los potenciales en O′ en el instante t'_e,

$$\phi'(\vec{r'}, t') = \frac{-e}{|\vec{r'} - \vec{r'_e}(t'_e)|}\,, \quad \vec{A'}(\vec{r'}, t') = 0\,, \tag{59}$$

  con $A'^{\alpha}A'_{\alpha} = -e^2/|\vec{r'} - \vec{r'_e}(t'_e)|^2$ invariante para una elección adecuada de t'_e.
- La expresión para $\{t_e, t'_e\}$ se obtiene del cuadrivector que describe el contacto causal entre el electrón y el observador,

$$R^{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} ct - ct_e \\ \vec{r} - \vec{r}_e(t_e) \end{pmatrix}\,, \tag{60}$$

  con $R_{\alpha}R^{\alpha} = 0$ en cualquier marco de referencia, por construcción.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- El **tiempo retardado**, t_e, queda definido por la norma nula de R,

$$R_\alpha R^\alpha = -c^2(t-t_e)^2 + |\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_e = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)|}{c}\,. \qquad (61)$$

- La invariancia de $R_\alpha R^\alpha$, vista en el marco de referencia del electrón, implica,

$$R'_\alpha R'^\alpha = -c^2(t'-t'_e)^2 + |\vec{r'}-\vec{r'_e}(t')|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi'(\vec{r'},t') = \frac{-e}{c\,(t'-t'_e)}\,.$$

- Por otro lado, el producto de R^α con la velocidad de la partícula, u^α, en t_e, produce el escalar invariante,

$$u^\alpha R_\alpha = -\gamma c^2\,(t-t_e) + \gamma\vec{v}_e(t_e)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)) = -c^2\,(t'-t'_e)\,.$$

- El invariante $u^\alpha R_\alpha$ permite expresar ϕ' en términos de t y t_e,

$$\phi' = \frac{-e}{\gamma|\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)| - \gamma\,(\vec{v}_e(t_e)/c)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_e(t_e))} = \frac{-e}{\gamma R\left(1-\vec{v}_e(t_e)\cdot\hat{R}/c\right)}\,,$$

con $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_e(t_e)$, la parte espacial de R^α. En general, el vector $\vec{r}$ es fijo.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- La transformación de Lorentz al marco del observador,

$$\phi = \gamma\phi', \quad \vec{A} = \gamma\vec{\beta}\phi' ,$$

resulta en los potenciales,

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{-e}{R\left(1 - \vec{v}_e(t_e)\cdot\hat{R}/c\right)}, \quad \vec{A} = \frac{-e\vec{v}_e/c}{R\left(1 - \vec{v}_e(t_e)\cdot\hat{R}/c\right)},$$

que pueden ser escritos en forma covariante,

$$A^\beta = \frac{-e\,u^\beta}{u^\alpha R_\alpha} = \frac{-e}{R\left(1 - \vec{v}_e\cdot\hat{R}/c\right)}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_e/c \end{pmatrix}. \tag{62}$$

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert

- Los potenciales (62) se conocen como potenciales de Liénard-Wiechert, también escritos como,

$$\phi(\vec{r},t) = \left[\frac{-e}{R\left(1-\hat{R}\cdot\vec{v}_e/c\right)}\right]_{t_e}, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \left[\frac{-e\,\vec{v}_e/c}{R\left(1-\hat{R}\cdot\vec{v}_e/c\right)}\right]_{t_e}. \tag{63}$$

  Son covariantes y Coulombianos en el marco del electrón.
- Formalmente existe una solución *avanzada* de estos potenciales, que corresponde con la posición futura del electrón en $t_a = t + |\vec{r} - \vec{r}_a(t_a)|/c$.
- Esta solución se descarta al ser inconsistente con el principio de causalidad.
- Una versión del principio de causalidad distingue a los potenciales retardados, que describen ondas que divergen de las cargas, de los potenciales avanzados, que resultan en ondas que convergen hacia ellas, contrariamente a lo observado en la naturaleza[4].

[4] Zeh (1989), "The physical basis of the arrow of time", Springer-Verlag.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert - campos

- Los campos correspondientes a los potenciales de Liénard-Weichert son,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{-e}{R^2}\left[\frac{\hat{R}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\hat{R}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{t_e} + \frac{-e}{Rc}\left[\frac{\hat{R}\times((\hat{R}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\hat{R}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{t_e}, \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \hat{R}\times\vec{E}(\vec{r},t)\,, \end{aligned} \tag{64}$$

con el movimiento del electrón evaluado en el tiempo retardado,

$$t_e = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)|}{c} = t - R/c\,, \quad R = |\vec{r}-\vec{r}_e(t_e)|\,, \quad \vec{\beta} = \vec{v}_e(t_e)/c.$$

- El campo tiene dos componentes:
  - el "campo de velocidad" ($\propto 1/R^2$), generalización del campo de Coulomb;
  - el "campo de aceleración"($\propto 1/R$), o "campo de radiación",

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{-e}{Rc}\left[\frac{\hat{R}\times((\hat{R}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\hat{R}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{t_e}, \quad \vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \hat{R}\times\vec{E}_{rad}(\vec{r},t). \tag{65}$$

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert - flujo y potencia

- El flujo de energía está dado por el vector de Poynting del campo de radiación,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}_{rad}\right|^2 \hat{R}, \tag{66}$$

  aprovechando $\{\vec{E}_{rad} \perp \vec{B}_{rad}\} \perp \hat{R}$.
- La potencia radiada por el electrón es la integral sobre área,

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a}_s = \int \frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}_{rad}\right|^2 R^2\, d\Omega\,, \tag{67}$$

  donde $|\vec{E}_{rad}| = |\vec{B}_{rad}| \propto 1/R$, implica que la radiación se diluye $\propto 1/R^2$.
- La radiación tiene una distribución angular determinada por,

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{c}{4\pi}|R\vec{E}_{rad}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\frac{\hat{R} \times \left((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}\right)}{(1 - \hat{R}\cdot\vec{\beta})^3}\right]^2_{t_e}, \tag{68}$$

  con $\{\,\vec{r}_e\,, \vec{\beta} = \vec{v}_e/c,\ \vec{a}\}$ evaluados en el tiempo retardado t_e.

4.2.2. Potenciales de Liènard-Wiechert - geometría

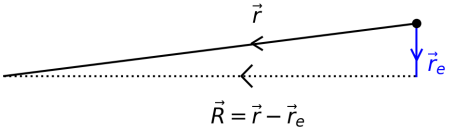


Figura 4: Selección del marco O tal que $r_e \ll r$. El origen está en el punto negro, cercano a la carga, situada en $\vec{r}_e$. El punto de medición está en $\vec{r}$, a la izquierda.

- Las distancias a las fuentes astrofísicas son mucho mayores que las dimensiones de sus regiones emisoras, $r_e \ll r$.
- Con la elección adecuada del sistema de referencia (fig. 4), podemos aproximar,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_e| \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)\,, \qquad t_e \approx t - r/c + \hat{r} \cdot \vec{r}_e(t_e)/c\,. \tag{69}$$

  - A orden cero $R \approx r$, siendo la posición del observador, $\vec{r}$, un vector fijo (fig. 4).
- La distribución angular de la potencia radiada (68), bajo la aproximación (69),

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\frac{\hat{r} \times \left((\hat{r} - \vec{\beta}) \times \vec{a}\right)}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^3}\right]^2_{t_e}\,. \tag{70}$$

4.2.3. Emisión por partículas no relativistas - fórmula de Larmor

- En movimiento no relativista ($\beta \ll 1$), los campos de radiación (65) son,

$$\vec{E}_{rad} \simeq -\frac{e}{c^2}\,\frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{a})}{r}\,, \qquad \vec{B}_{rad} \simeq \frac{e}{c^2}\,\frac{\hat{r}\times\vec{a}}{r}, \tag{71}$$

  con $t_e \approx t - r/c$.

- La potencia radiada por ángulo sólido es,

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{c}{4\pi}|R\vec{E}_{rad}|^2 \simeq \frac{e^2}{4\pi c^3}\,|\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{a})|^2 = \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\,\sin^2\theta\,, \tag{72}$$

  siendo θ el ángulo entre la línea de visión, $\hat{r}$, y la aceleración, $\vec{a}$.

- Al integrar se obtiene la expresión no relativista de la **fórmula de Larmor**,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\,\sin^2\theta \quad\Rightarrow\quad P(t) = \frac{2\,e^2a^2}{3\,c^3}\,. \tag{73}$$

4.2.3. Emisión por partículas no relativistas - patrón dipolar

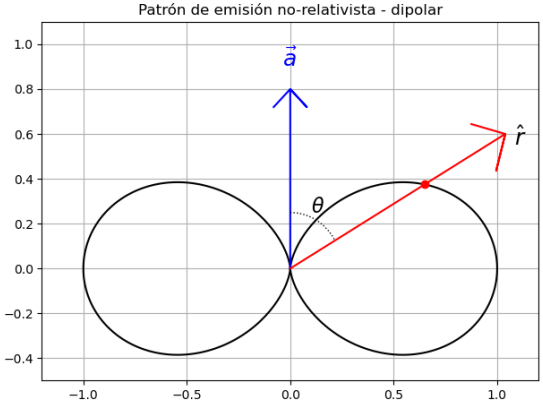


Figura 5: La emisión de radiación por una partícula no relativista sigue un patrón dipolar.

Para una partícula no relativista:

(i) la potencia es proporcional al cuadrado de la carga y de la aceleración, $P \propto a^2 e^2$.

(ii) La emisión sigue un patrón *dipolar* ($\propto \sin^2\theta$).

(iii) Si $\vec{a}$ tiene dirección fija, $\vec{E} \propto \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$ es fijo $\rightarrow$ la polarización es lineal.

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - fórmula de Larmor

- La fórmula de Larmor (73) se generaliza a la expresión covariante,

$$P' = \frac{2e^2}{3c^3} a'^2 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu a^\mu \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\gamma^4 a_\perp^2 + \gamma^6 a_\parallel^2\right), \qquad (74)$$

  con $\{a_\parallel, a_\perp\}$ componentes de $\vec{a}$ paralela y perpendicular a la velocidad (ec. 31).
- El patrón de emisión relativista está dado por la expresión general (70),

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\frac{\hat{r}\times\left((\hat{r}-\vec{\beta})\times\vec{a}\right)}{(1-\hat{r}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{t_e}^2 .$$

  - La integración sobre el tiempo debe tomar en cuenta que $dP(t)/d\Omega$ se evalúa en t_e, con la relación diferencial,

$$dt = (1-\hat{r}\cdot\vec{\beta})dt_e \rightarrow dt_e/2\gamma^2.$$

  - Se distinguen los casos $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, y $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - movimiento $\vec{a} \parallel \vec{v}$

- Si $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, la expresión (70) da,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{a})}{(1-\hat{r}\cdot\vec{\beta})^3}\right]^2_{t_e} = \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\,\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\,. \tag{75}$$

- Los extremos del patrón de emisión son:
  - mínimo en $\theta = 0$, donde la emisión es nula; máximo en,

$$\cos\theta_{max} = (\sqrt{1+24\beta^2}-1)/4\beta \quad \Rightarrow \quad \theta_{max}(\gamma\to\infty) \to 1/\sqrt{5}\,\gamma\,.$$

- En el límite ultrarelativista, $\gamma \gg 1$, y para ángulos pequeños, $\theta \ll 1$, se aproxima,

$$\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2, \quad \sin\theta \simeq \theta, \quad \cos\theta \simeq 1-\theta^2/2,$$

  de donde, la forma del cono de emisión queda descrita por,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} \longrightarrow \gamma^{10}\left(\frac{16e^2}{\pi c^3}\right)\frac{\gamma^2\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^6}\,.$$

  - La figura 6 ilustra los casos semi-relativista y $\gamma \to \infty$.

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - movimiento $\vec{a} \parallel \vec{v}$

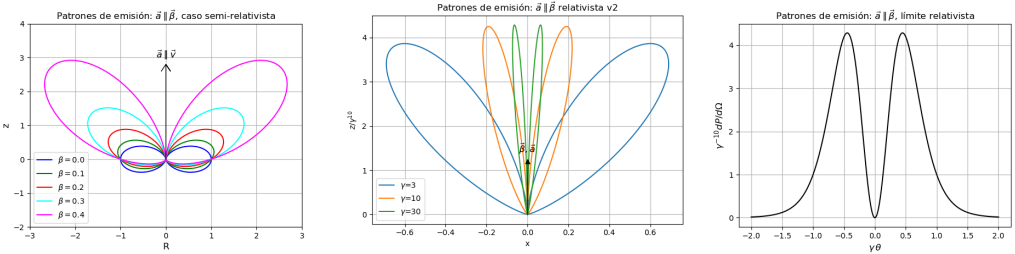


Figura 6: Emisión de una carga con movimiento lineal, $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ sobre el eje $\hat{z}$. Casos semi-relativista (*izquierda*) y relativista, escalado por γ^{10} (*centro, derecha*).

- $dP(t)/d\Omega \propto \gamma^8$, al considerar $t_e \to t$.
- La integración sobre $d\Omega$ introduce otro factor γ^{-2}, de manera que $P \propto \gamma^6 a^2$.

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - movimiento $\vec{a} \perp \vec{v}$

- En el caso $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$, se obtiene de la expresión general (70),

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \left[\frac{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^2 - (\hat{r} \cdot \hat{a})^2/\gamma^2}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta})^6} \right]_{t_e}, \tag{76}$$

  con un término de amplificación para $\vec{\beta}$ en la línea de visión, con la emisión restringida a un cono de ángulo $1/\gamma$, junto al término $(\hat{r} \cdot \hat{a})$ atenuado.

- patrón dipolar para el caso no relativista,

$$\frac{dP}{d\Omega} \longrightarrow \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \left(1 - (\hat{r} \cdot \hat{a})^2\right).$$

- máxima amplificación en la dirección $\hat{r} = \hat{\beta}$,

$$\frac{dP}{d\Omega} \longrightarrow \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1-\beta)^4} \simeq 16\gamma^8 \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}.$$

- $dP(t)/d\Omega \propto \gamma^6$, al considerar $t_e \to t$; $P \propto \gamma^4 a^2$ al integrar sobre $d\Omega$.

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - movimiento $\vec{a} \perp \vec{v}$

- Situando la aceleración y velocidad perpendiculares en el plano $x - y$, con θ el ángulo entre la línea de visión y el plano de movimiento,

$$\vec{a} = a\hat{x}, \quad \vec{\beta} = \beta\hat{y}, \quad \hat{r} = (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta\,.$$

- La expresión (76) queda como,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\left[\frac{(1-\beta\sin\theta\sin\phi)^2 - \sin^2\theta\cos^2\phi/\gamma^2}{(1-\beta\sin\theta\sin\phi)^6}\right].$$

- Tomando como referencia el plano $z = 0$, en el caso relativista,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\frac{1}{(1-\beta\sin\phi)^4} \rightarrow \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\frac{16\gamma^8}{(1+\gamma^2\Delta\phi^2)^4},$$

que describe una amplificación $\propto \gamma^8$ dentro de un cono de apertura $\sim 1/\gamma$, alrededor de $\vec{\beta}$ ($\Rightarrow \Delta\phi = \phi - \pi/2$).

4.2.3. Emisión por partículas relativistas - movimiento $\vec{a} \perp \vec{v}$

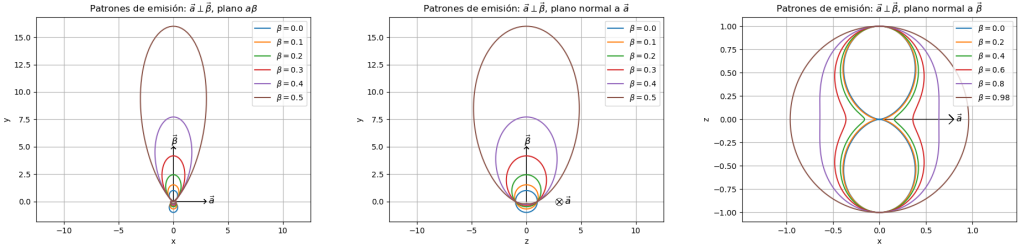


Figura 7: Patrones de emisión para $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, en el caso moderadamente relativista, $\beta \leq 0.5$. El patrón migra de dipolar $\beta = 0$ a amplificado por un factor de 16 en la dirección de la velocidad. Se muestran los planos de movimiento (izquierda), normal a $\vec{a}$ (centro) y normal a $\vec{v}$ (derecha). En el caso $\gamma \gg 1$ la emisión queda restringida a un cono de apertura $1/\gamma$ alrededor del eje de velocidad.

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- La potencia describe la energía radiada por unidad de tiempo, $P(t) = d\mathcal{E}/dt$;
- el espectro, $P(\omega) = d\mathcal{E}/d\omega$, describe la distribución en frecuencias. Tomando en cuenta su distribución angular se tiene,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt}\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega}\, d\omega\,, \tag{77}$$

donde las frecuencias negativas no contribuyen.

- De (68), considerando que $\vec{E}$ real $\Rightarrow$ $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega)$, se obtiene,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} \left|RE(t)\right|^2 dt = \frac{c}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \left|R\vec{E}(\omega)\right|^2 d\omega\,.$$

- $R\vec{E}(t)$ y $R\vec{E}(\omega)$ se relacionan mediante transformada de Fourier,

$$R\vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(t) e^{i\omega t} dt,\ R\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R\vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\,. \tag{78}$$

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- Al introducir la expresión para el campo de radiación (65), se tiene,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\hat{R}\times\{(\hat{R}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\hat{R}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{t_e} e^{i\omega t}dt\right|^2 .$$

- Al aproximar

$$R \simeq r, \qquad t \simeq t_e + r/c - \hat{r}\cdot\vec{r}_e(t_e)/c\,,$$

y cambiar variable de integración,

$$dt = (1-\vec{\beta}\cdot\hat{r})dt_e,$$

despreciando el término (de fase) $e^{i\omega r/c}$, se obtiene

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\hat{r}\times\{(\hat{r}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\hat{r}\cdot\vec{\beta})^2}\right] e^{i\omega(t_e-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t_e)/c)}dt_e\right|^2 .$$

4.2.4. Distribución espectral de la radiación

- Jackson (§14) afirma que el término en paréntesis es una diferencial exacta[5],

$$\left[\frac{\hat{r}\times\{(\hat{r}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\hat{r}\cdot\vec{\beta})^2}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})}{1-\hat{r}\cdot\vec{\beta}}\right],$$

lo que permite integrar por partes y, notando que la variable de integración es muda, reducir la expresión a,

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega}=\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})e^{i\omega(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c)}dt\right|^2. \tag{79}$$

- El espectro integrado sobre ángulo sólido representa la expresión general para el espectro de una partícula en movimiento,

$$P(\omega)=\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\int\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})e^{i\omega(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c)}dt\right|^2 d\Omega\,. \tag{80}$$

[5] aprovechando la identidad $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

4.3.Sistemas de cargas en movimiento

4.3.1. Aproximación dipolar.
4.3.2. Expansión multipolar.

4.3.1. Aproximación dipolar

- Un sistema de cargas en movimiento no relativista se describe generalizando la expresión de Larmor (73), con la definición del momento dipolar del sistema, $\vec{d}$,

$$P(t) = \sum_i \frac{2q_i^2 a_i^2}{3c^3} = \frac{2|\ddot{\vec{d}}(t)|^2}{3c^3}\,, \quad \vec{d}(t) = \sum_i q_i \vec{r}_i(t) = \int \rho(\vec{r},t)\,\vec{r}\,d^3r\,. \tag{81}$$

- La expresión (71) para campos y distribución angular de la emisión se generaliza,

$$\vec{E}_{rad}(t) = \frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{\vec{d}})}{rc^2}\,, \quad \vec{B}_{rad}(t) = -\frac{\hat{r}\times\ddot{\vec{d}}}{rc^2}\,, \quad \frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\,, \tag{82}$$

  con $\vec{r}$ la posición del observador con respecto al centro de la distribución de carga.
- El comportamiento espectral se obtiene al transformar los campos,

$$\vec{E}_{rad}(\omega) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\hat{r}}{r}\times(\hat{r}\times\vec{d}(\omega))\,, \quad \vec{B}_{rad}(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\hat{r}}{r}\times\vec{d}(\omega)\,, \tag{83}$$

  con $\vec{d}(\omega)$ la transformada de $\vec{d}(t)$. El factor $-\omega^2$ proviene de la segunda derivada.

4.3.1. Aproximación dipolar

- Dejando de lado el término $\hat{r} \cdot \vec{r}_e/c$ en la exponencial armónica (79), se obtiene el espectro dipolar,

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left|r\vec{B}_{rad}(\omega)\right|^2 = \frac{\omega^4}{2\pi c^3}\left|\vec{d}(\omega)\right|^2 \sin^2\theta\,, \quad P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3}\left|\vec{d}(\omega)\right|^2\,, \quad (84)$$

  siendo $P(\omega) = d\mathcal{E}/d\omega$ la distribución espectral de la energía radiada.
- La aproximación dipolar es válida para conjuntos de cargas en movimiento no relativista, acotadas a una región emisora de tamaño $L \ll r$.
- Aplicaciones directas son la dispersión de Rayleigh y la emisión de frenado, o *bremsstrahlung*.

4.3.2. Expansión multipolar - desarrollo

- Un tratamiento general de los campos debidos a distribuciones de cargas no estáticas considera la solución formal de la ecuación de onda (45), para los potenciales electromagnéticos, dada una distribución de cargas y corrientes,

$$A^\alpha(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\jmath^\alpha(\vec{x},t')}{|\vec{r}-\vec{x}|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{x}|}{c}\right)\,d^3x\,dt'. \tag{85}$$

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad \jmath^\alpha = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix}.$$

  - Las distribuciones de carga y corriente se sitúan en la región descrita por $\vec{x}$, y se evalúan en el tiempo retardado, t', a través de la función δ.
- Se aproxima $|\vec{r}-\vec{x}| \approx r$ en denominador, $|\vec{r}-\vec{x}| \approx r - \vec{r}\cdot\vec{x}$ en el tiempo retardado,

$$A^\alpha(\vec{r},t) = \frac{1}{rc}\int \jmath^\alpha\left(\vec{x},t'\right)\delta\left(t'-t+\frac{r}{c}-\frac{\hat{r}\cdot\vec{x}}{c}\right)\,d^3x\,dt'. \tag{86}$$

4.3.2. Expansión multipolar - desarrollo

- El espectro considera la transformada de Fourier de estos potenciales,

$$A^\alpha(\vec{r},\omega) = \frac{1}{rc}\int \jmath^\alpha\left(\vec{x},t'\right)\delta\left(t'-t+\frac{r}{c}-\frac{\hat{r}\cdot\vec{x}}{c}\right)e^{i\omega t}\,d^3x\,dt'dt\,.$$

- Se integra la transformada sobre t, aprovechando la función δ, para obtener

$$\begin{aligned} A^\alpha(\vec{r},\omega) &= \frac{1}{rc}\int \jmath^\alpha\left(\vec{x},t'\right)e^{i\omega(t'-r/c+\hat{r}\cdot\vec{x}/c)}d^3x\,dt' \\ &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\int \jmath^\alpha\left(\vec{x},\omega\right)e^{i\omega\hat{r}\cdot\vec{x}/c}d^3x. \end{aligned} \tag{87}$$

- El desarrollo en serie la exponencial da lugar a la **expansión multipolar**,

$$A^\alpha(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\omega}{c}\right)^n\int(\hat{r}\cdot\vec{x})^n\,\jmath^\alpha(\vec{x},\omega)d^3x\,. \tag{88}$$

- La expansión converge rápidamente para $|\omega\vec{x}/c| \ll 1 \Rightarrow x \ll \lambda$, un emisor menor que la longitud de onda que emite.

4.3.2. Expansión multipolar - condición de convergencia

- La condición de convergencia, $x \ll \lambda$, no parece obvia en entornos astrofísicos.
  - Las dimensiones x se refieren a las de emisión coherente, como las recorridas por cargas emitiendo con frecuencia ω durante un periodo de vibración,

$$x \sim v\, 2\pi/\omega = v(\lambda/c) \ll \lambda\,,$$

  para $v \ll c$.
- Algunos sistemas macroscópicos, como estrellas de neutrones, no cumplen $x \ll \lambda$.
  - Tampoco lo cumplen regiones con cargas altamente relativistas.
  - En cualquier caso, la expresión general (87) es aplicable,

$$A^{\alpha}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \int \jmath^{\alpha}\left(\vec{x},\omega\right) e^{i\omega \hat{r}\cdot\vec{x}/c} d^3x.$$

4.3.2. Expansión multipolar - campos y potencial vectorial

- Lejos de la región emisora, el campo se comporta como una superposición de ondas planas, que se puede describir directamente con el potencial vectorial $\vec{A}$,

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B} \times \hat{r}\,.$$

- En analogía al caso dipolar (82),

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}}{rc^2}, \quad \vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})}{rc^2}, \quad \text{con} \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{rc}\,,$$

los campos pueden ser descritos directamente con el potencial vectorial ,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r},t) &= \dot{\vec{A}} \times \hat{r}/c, & \vec{E}(\vec{r},t) &= (\dot{\vec{A}} \times \hat{r}) \times \hat{r}/c, \\ \vec{B}(\vec{r},\omega) &= -i\,(\omega/c)\,\vec{A} \times \hat{r}, & \vec{E}(\vec{r},\omega) &= -i\,(\omega/c)\,(\vec{A} \times \hat{r}) \times \hat{r}, \end{aligned} \tag{89}$$

generalizado con la expansión multipolar,

$$\vec{A}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^n \int (\hat{r} \cdot \vec{x})^n\, \vec{\jmath}(\vec{x},\omega) d^3x\,, \; \dot{\vec{A}}(t) \to -i\omega \vec{A}(\omega). \tag{90}$$

4.3.2. Expansión multipolar - momento dipolar eléctrico

- La expansión en serie (88) da lugar a los momentos multipolares. Para el desarrollo se emplea el potencial vectorial, partiendo de la relación entre densidades,

$$\vec{\jmath}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\dot{\vec{x}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\jmath}(\vec{x},\omega) = -i\omega\vec{x}\,\rho(\vec{x},\omega)\,,$$

- $n = 0 \Rightarrow$ momento **dipolar eléctrico**:
- a orden cero el potencial vectorial es,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\int \vec{\jmath}(\vec{x},\omega)\,d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\,(-i\omega)\,\vec{d}(\omega)\,. \tag{91}$$

- Los campos correspondientes están dados por,

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{c}\vec{A}\times\hat{r} = -e^{-i\omega r/c}\left(\frac{\omega^2}{rc^2}\right)\vec{d}(\omega)\times\hat{r}, \quad \vec{E} = \vec{B}\times\hat{r}. \tag{92}$$

- Transformando de regreso tenemos el potencial y campos dipolares,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{rc} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\ddot{\vec{d}}\times\hat{r}}{rc^2}, \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{(\ddot{\vec{d}}\times\hat{r})\times\hat{r}}{rc^2}. \tag{93}$$

4.3.2. Expansión multipolar - momentos superiores

- $n = 1 \Rightarrow$ **momentos dipolar magnético** y **cuadrupolar eléctrico**:
- el término $n = 1$ de la expansión es,

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\left(\frac{i\omega}{c}\right)\int (\hat{r}\cdot\vec{x})\,\vec{\jmath}(\vec{x},\omega)\,d^3x\,.$$

- La identidad $(\vec{x}\times\vec{\jmath})\times\hat{r} = (\hat{r}\cdot\vec{x})\vec{\jmath} - (\hat{r}\cdot\vec{\jmath})\vec{x}$, permite separar la integral como,

$$(\hat{r}\cdot\vec{x})\,\vec{\jmath} = \frac{1}{2}(\vec{x}\times\vec{\jmath})\times\hat{r} \quad + \quad \frac{1}{2}(\hat{r}\cdot\vec{x})\,\vec{\jmath} + \frac{1}{2}(\hat{r}\cdot\vec{\jmath})\,\vec{x}\,. \tag{94}$$

- El término en $(\vec{x}\times\vec{\jmath})$ corresponde al **momento dipolar magnético**.
- Los otros dos términos corresponden al **momento cuadrupolar eléctrico**.

4.3.2. Expansión multipolar - momento dipolar magnético

- $n = 1 \Rightarrow$ **momentos dipolar magnético**:
- Al definir el momento dipolar magnético,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{x} \times \vec{j})\, d^3x\,, \tag{95}$$

se obtiene el potencial respectivo,

$$\vec{A}^{(1)}_{dm}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c}\right) \int \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{j}) \times \hat{r}\, d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{i\omega}{c}\right) \vec{m} \times \hat{r}. \tag{96}$$

- y los campos electromagnéticos asociados,

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\vec{m} \times \hat{r}) \times \hat{r}, \quad \vec{E}(\vec{r},\omega) = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{r} \times \vec{m}.$$

4.3.2. Expansión multipolar - momento dipolar magnético

- El patrón para la emisión de un dipolo magnético resulta de,

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left|r\vec{E}(\omega)\right|^2 = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\hat{r}\times\vec{m}|^2 = \frac{\omega^4}{2\pi c^3}|\vec{m}|^2\sin^2\theta,$$

con θ el ángulo entre $\vec{m}(\omega)$ y la línea de visión $\hat{r}$, y

$$P(\omega) = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\vec{m}(\omega)|^2 \ .$$

4.3.2. Expansión multipolar - momento cuadrupolar eléctrico

- $n = 1 \Rightarrow$ momento **cuadrupolar eléctrico**.
- El segundo término en (94) da lugar a,

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(1)}_{qe}(\vec{r},\omega) &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\left(\frac{i\omega}{c}\right)\frac{1}{2}\int\left[(\hat{r}\cdot\vec{x})\,\vec{\jmath}+(\hat{r}\cdot\vec{\jmath})\,\vec{x}\right]d^3x\,, \qquad (97)\\ &= \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\left(\frac{i\omega}{c}\right)\frac{(-i\omega)}{2}\int\vec{x}\,(\hat{r}\cdot\vec{x})\;\rho(\vec{x})\,d^3x = \frac{e^{-i\omega r/c}}{rc}\left(\frac{\omega^2}{6c}\right)\;\vec{Q}(\hat{r})\,. \end{aligned}$$

- $\vec{Q}(\hat{r}) = \mathbf{Q}\cdot\hat{r}$ es la proyección de $\mathbf{Q}$, tensor de momento cuadrupolar eléctrico, definido simétrico con traza cero,

$$Q_{ij} = \int\left(3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec{x})\,d^3x\,, \qquad (98)$$

sobre la línea de visión, $\hat{r} = (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$.

4.3.2. Expansión multipolar - momento cuadrupolar eléctrico

- La expresión cuadrupolar (97) se puede escribir más explícitamente con $\vec{Q}(\hat{r})$,

$$\vec{A} = \frac{e^{-i\omega r/c}}{6r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \begin{pmatrix} (Q_{xx}\cos\phi + Q_{xy}\sin\phi)\sin\theta + Q_{xz}\cos\theta \\ (Q_{yx}\cos\phi + Q_{yy}\sin\phi)\sin\theta + Q_{yz}\cos\theta \\ (Q_{zx}\cos\phi + Q_{zy}\sin\phi)\sin\theta + Q_{zz}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Los campos correspondientes son,

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = -ie^{-i\omega r/c}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \frac{\vec{Q}(\hat{r})\times\hat{r}}{6r}, \quad \vec{E}(\vec{r},\omega) = -ie^{-i\omega r/c}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \frac{\left(\vec{Q}(\hat{r})\times\hat{r}\right)\times\hat{r}}{6r}.$$

- La potencia radiada por un cuadrupolo viene dada por

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left|r\vec{B}(\omega)\right|^2 = \frac{c}{72\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^6\left|\vec{Q}(\hat{r})\times\hat{r}\right|^2, \quad P(\omega) = \frac{\omega^6}{90c^5}||\mathbf{Q}(\omega)||^2. \tag{99}$$

4.3.2. Expansión multipolar - resumen

- El potencial vectorial en función del tiempo y desarrollado hasta $n = 1$,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{d}}}{rc} + \frac{\dot{\vec{m}} \times \hat{r}}{rc} + \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}(\hat{r})}{6rc^2} + \dots , \tag{100}$$

- Los campos electromagnéticos quedan como,

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{rc^2}\left\{ \ddot{\vec{d}} \times \hat{r} + (\ddot{\vec{m}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c}\, \dddot{\vec{Q}}\,(\hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right\} , \tag{101}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{rc^2}\left\{ (\ddot{\vec{d}} \times \hat{r}) \times \hat{r} + \hat{r} \times \ddot{\vec{m}} + \frac{1}{6c}(\dddot{\vec{Q}}\,(\hat{r}) \times \hat{r}) \times \hat{r} + \dots \right\} . \tag{102}$$

- El desarrollo multipolar resulta en la expansión para la potencia,

$$P(t) = \frac{2|\ddot{\vec{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\vec{m}}|^2}{3c^3} + \frac{||\,\dddot{\mathbf{Q}}\,||^2}{180\,c^5} + \dots \;\Rightarrow\; P(\omega) = \frac{4\omega^4}{3c^3}\left(|\vec{d}|^2 + |\vec{m}|^2\right) + \frac{\omega^6}{90c^5}||\vec{\mathbf{Q}}||^2 + \dots , \tag{103}$$

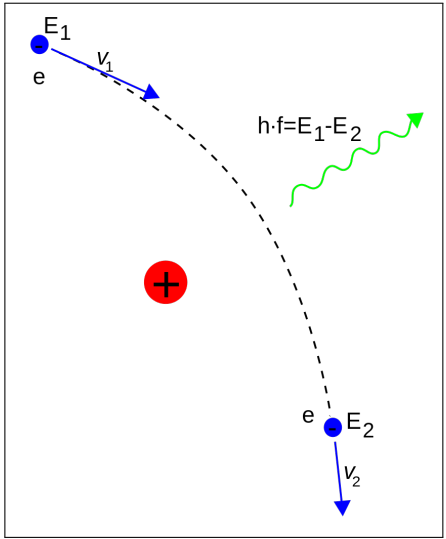
- Para continuar la expansión conviene expresar (87, 88) con armónicos esféricos.

4.4. Bremsstrahlung

4.4.1. Deflexión de un electrón por un núcleo.
4.4.2. Deflexiones pequeñas.
4.4.3. Movimiento hiperbólico.
4.4.4. Bremsstrahlung térmico.
4.4.5. Absorción libre-libre.
4.4.6. Bremsstrahlung relativista.

4.4. Bremsstrahlung

- La radiación debida a la deflexión Coulombiana entre cargas se conoce como *bremsstrahlung*, radiación de frenado o *radiación libre-libre*.
- El bremsstrahlung es un mecanismo de enfriamiento importante en plasmas astrofísicos.
- La interacción se trata de manera clásica si la energía radiada es mucho menor que la energía inicial del sistema; el caso opuesto requiere un formalismo cuántico.
- Para movimientos no relativistas ($v \ll c$) se emplea la aproximación dipolar.
- Dos partículas de misma carga y masa no tienen dipolo $\Rightarrow$ la interacción entre dos electrones es cuadrupolar (TBD!).



4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - planteamiento clásico

- Si la energía radiada es despreciable frente a la energía total, podemos describir la interacción entre dos cargas con la solución clásica del problema de dos cuerpos bajo el potencial de Coulomb.
- Se conservan energía y momento angular:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 + \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\,, \quad \vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2\,, \tag{104}$$

  con $m_1 = m_e$, $q_1 = -e$, $m_2 = Am_p$, $q_2 = Ze$.
- El problema se reduce con la posición relativa, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, y la masa reducida $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, considerando conservación de energía y momento angular,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{Ze^2}{r}\,, \quad \vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}\,. \tag{105}$$

- El movimiento relativo coincide prácticamente con el electrón: $\vec{r} \to \vec{r}_e$, $m \to m_e$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - parámetros

- Fijando $\vec{L} = L\hat{z}$, se describe el movimento en el plano $\{r, \varphi\}$,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{Ze^2}{r}, \quad L = mr^2\dot{\varphi}. \tag{106}$$

  Trayectorias $r(\varphi)$ elípticas[6] ($\mathcal{E} < 0$), parabólicas ($\mathcal{E} = 0$), o hiperbólicas ($\mathcal{E} > 0$).
- La solución para $\mathcal{E} > 0$ es la hipérbola dada por,

$$r(\varphi) = \frac{a\left(\varepsilon^2 - 1\right)}{\varepsilon\cos\varphi + 1}, \tag{107}$$

  con semi-eje mayor y excentricidad,

$$a = \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}}, \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2\mathcal{E}L^2}{mZ^2e^4}\right)^{1/2} > 1.$$

- La hipérbola tiene asíntotas dadas por las rectas: $x = a\varepsilon \pm y/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

[6] Órbitas cerradas requieren una descripción cuántica.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - trayectoria

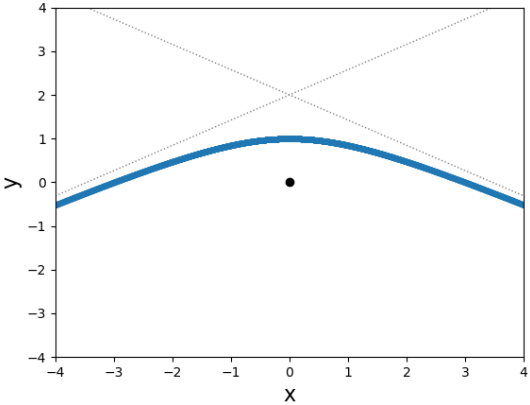


Figura 8: Movimiento de una carga en un campo central Coulombiano, para $a = 1, \varepsilon = 2 \Rightarrow \Delta\theta = 60°$. El centro de atracción está en el origen, el parámetro de impacto es $b = \sqrt{3}$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - parámetro de impacto

- Conviene emplear como parámetros la velocidad inicial, v_0, y el parámetro de impacto, b, relacionados con la energía y el momento angular mediante,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2,\ L = mbv_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}},\ b = \frac{L}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,. \tag{108}$$

- La escala de tiempo de interacción es

$$\tau = \frac{Ze^2}{mv^3} = \frac{a}{v} = \frac{b/v}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \tag{109}$$

- En el caso de deflexiones pequeñas se puede emplear alternativamente $\tau = b/v$.

4.4.1. Deflexión de un electrón por núcleo - límites

- La aproximación clásica (no-cuántica) es válida para,

$$L \gg \hbar \quad \Rightarrow \quad b \gg \frac{\hbar}{mv_0}\,. \tag{110}$$

- Las asíntotas de la hipérbola, dadas por $x = a\varepsilon \pm y/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, dan deflexiones pequeñas si,

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{Ze^2}{bmv_0^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad b \gg \frac{Ze^2}{mv_0^2}\,, \tag{111}$$

  siendo $\Delta\varphi$ el angulo entre asíntotas.
- La cota de deflexiones pequeñas implica un tratamiento clásico si

$$\frac{Ze^2}{mv_0^2} \gg \frac{\hbar}{mv_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{c} \ll Z\alpha, \tag{112}$$

  con $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ la constante de estructura fina.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

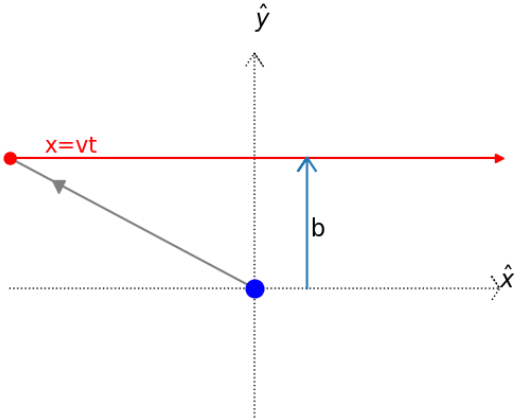


Figura 10: Trayectoria en una interacción con deflexión pequeña.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

- Consideramos una trayectoria rectilínea a velocidad constante, $\vec{r}(t) = \hat{x}\, vt + \hat{y}\, b$.
- Parametrizamos el tiempo es términos de $\tau = b/v$.
- El espectro $P(\omega)$ depende de la transformada del dipolar eléctrico $\vec{d} = -e\vec{r}$.
  - Esta se obtiene de transformar $\ddot{\vec{d}} = -e\vec{a}$,

$$-\omega^2 \vec{d}(\omega) = \frac{-e}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}(t) e^{-i\omega t} dt\,. \tag{115}$$

- La aceleración está dada por,

$$m\vec{a}(t) = -\frac{Ze^2}{r^2}\,\hat{r} = -Ze^2\,\frac{(\hat{x}\, vt + \hat{y}\, b)}{[v^2t^2 + b^2]^{3/2}} \;\Rightarrow\; \vec{a}(t) = -\frac{Ze^2}{mb^2}\,\frac{(\hat{x}\, t/\tau + \hat{y})}{\left[(t/\tau)^2 + 1\right]^{3/2}}.$$

- Se hace el cambio de variable $s = vt/b$,

$$\vec{d}(\omega) = \frac{e}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{Ze^2}{mb^2}\right) \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}\, s + \hat{y}}{(s^2+1)^{3/2}} \exp\{-i\,\omega\tau s\}\, ds\,. \tag{116}$$

4.4.2. Deflexiones pequeñas - movimiento y aceleración

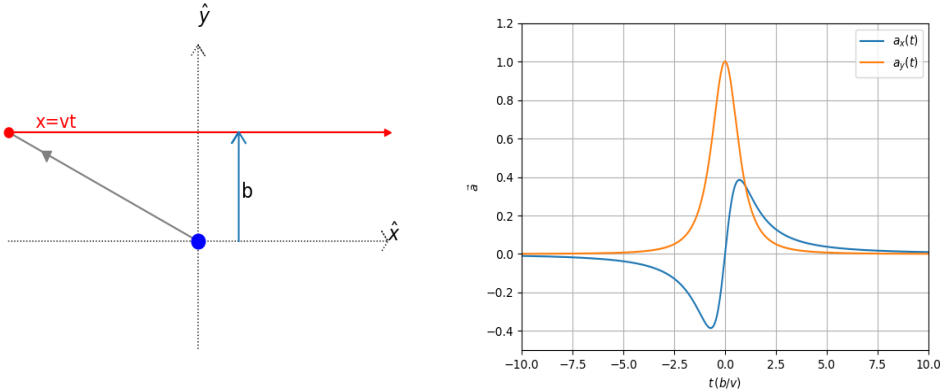


Figura 11: Trayectoria y aceleración en una interacción con deflexión pequeña. El tiempo característico de interacción es $\tau = b/v$.

4.4.2. Deflexiones pequeñas - espectro por un electrón

- La interacción dura un tiempo $t \sim \tau = b/v$, actuando en frecuencias $\omega\tau \lesssim 1$.
  - Para $\omega\tau \gg 1$, la exponencial compleja oscila muy rápidamente, cancelando términos sucesivos en la integración. La integral tiende a un valor muy pequeño.
  - Para $\omega\tau \ll 1$, se aproximamos la exponencial a uno, resultando en $d_x(\omega) \to 0$, y la integral sobre la componente $\hat{y}$ igual a 2, de donde

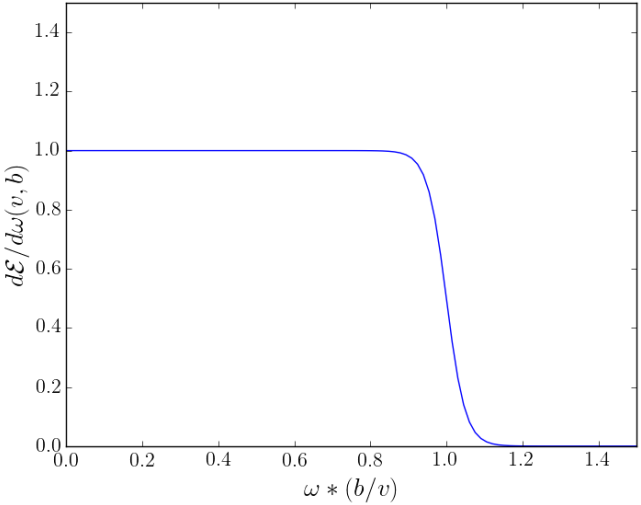
$$\vec{d}(\omega) \approx \begin{cases} -(e/\omega^2\sqrt{2\pi})\,(2Ze^2/mbv)\,\hat{y} & \text{para} \quad \omega\tau \ll 1\,, \\ 0 & \text{para} \quad \omega\tau \gg 1\,. \end{cases} \tag{119}$$

- De aquí la energía radiada por unidad de frecuencia en la colisión de un electrón con velocidad v, parámetro de impacto b, con un núcleo de carga $+Ze$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v,b) = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\vec{d}(\omega)|^2 = \begin{cases} 8Z^2e^6/3\pi m^2c^3\,v^2b^2 & \text{para} \quad \omega\tau \ll 1\,, \\ 0 & \text{para} \quad \omega\tau \gg 1\,, \end{cases} \tag{120}$$

- A primer orden, el espectro es independiente de ω, excepto por el corte a $\omega\tau \gg 1$.

4.4.2. **Deflexiones pequeñas** - espectro por un electrón



Espectro esquemático de la radiación bremsstrahlung de un electrón.

4.4.2. Deflexiones pequeñas - en un plasma

- La emisión por un plasma con densidad de iones n_i, densidad de electrones n_e, considera el flujo de electrones de velocidad v incidiendo en un anillo de radio b y ancho db alrededor de cada núcleo:

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt\, dV d\omega} = n_i\, n_e v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega}(v,b)\, 2\pi b\, db = \frac{16}{3\pi} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3\, v} n_e n_i \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) , \quad (121)$$

donde el rango finito de b asegura la convergencia de la integral.

- El límite superior viene dado por: $\omega\tau \approx 1 \Rightarrow b_{max} \approx v/\omega$.
- Dos opciones a considerar para el límite inferior:

(1) deflexiones pequeñas, $b_{min}^{(1)} \equiv Ze^2/mv^2$;

(2) el límite cuántico, $b_{min}^{(2)} \equiv \hbar/mv$.

- Al considerar $b_{min}^{(1)} \gg b_{min}^{(2)}$ suponemos $v/c \ll Z\alpha \simeq Z/137$.

4.4.2. Aproximación para deflexiones pequeñas

- El resultado (121) puede escribirse de forma general definiendo el *factor de Gaunt*, $g_{ff}(v,\omega)$, tal que

$$\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt\,dV\,d\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3\,v}n_e n_i\,g_{ff}(v,\omega)\,. \tag{122}$$

- Para deflexiones pequeñas ($v/c \ll \alpha Z$),

$$g_{ff}(v,\omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{mv^3/Ze^2}{\omega}\right), \tag{123}$$

válida para $\omega \ll mv^3/Ze^2 = v/b_{min}$.

- La condición de que energía radiada sea mucho menor que $\mathcal{E}$ equivale a,

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}\right)\left(\frac{v}{b}\right) \ll \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad b \gg \frac{Ze^2}{mv^2}\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{16}{3\pi Z}\right)^{1/3}, \tag{124}$$

la cual se cumple para deflexiones pequeñas y movimiento no relativista.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

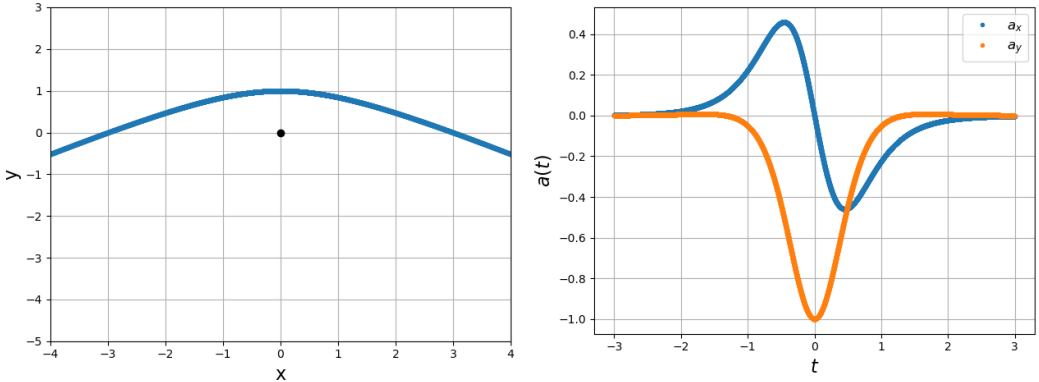


Figura 13: Izquierda: trayectoria hiperbólica de una carga en el campo de un núcleo. Siguiendo la parametrización (125), se usó $\varepsilon = 2$ ($\rightarrow$ parámetro de impacto $b = \sqrt{3}$), $\psi \in (-3, +3)$. Al igual que para deflexiones pequeñas, $x(t)$ es impar mientras que $y(t)$ es par. Derecha: componentes de aceleración: a_y representa la contribución dominante al proceso.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

- Un tratamiento más preciso se basa en el movimiento hiperbólico descrito con ecuaciones paramétricas[7].
  - En coordenadas cartesianas,

$$x = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,\sinh\psi, \quad y = a\left(\varepsilon - \cosh\psi\right), \quad t = \tau\left(\varepsilon\sinh\psi - \psi\right). \tag{125}$$

  con $a = Ze^2/2\mathcal{E}$, $\tau = Ze^2/mv^3 = a/v$, $\psi \in (-\infty, +\infty)$.
  - Se puede verificar $v = a/\tau$, $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.
  - El espectro se obtiene de (84), con el dipolo,

$$\vec{d}(\omega) = m\vec{r}(\omega)(q_1/m_1 - q_2/m_2) \approx -e\vec{r}(\omega)\,.$$

- En este problema, el cálculo de $\vec{r}(\omega)$ es más directo integrando velocidades,

$$\begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\cosh\psi \\ -\sinh\psi \end{pmatrix} \exp\left\{i\omega\tau(\psi - \varepsilon\sinh\psi)\right\}\, d\psi.$$

[7] "The Classical Theory of Fields", §70, Landau & Lifshitz.

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

- Las integrales quedan como

$$x(\omega) = -i\frac{a}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}H^{(1)}_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon),\ y(\omega) = i\,\frac{a}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}H^{(1)\prime}_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon),$$

con $H^{(1)}_p$ la primera función de Hankel de orden p, y $H^{(1)\prime}_p$ su derivada,

$$H^{(1)}_p(ix) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\psi - ix\sinh\psi}d\psi\,.$$

- La distribución espectral debida a una colisión es análoga a (120),

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2\pi\, e^2 a^2\,\omega^2}{3c^3}\left(|H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon)|^2 + \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}|H_{i\omega\tau}(i\omega\tau\varepsilon)|^2\right)\,. \qquad (126)$$

4.4.3. Bremsstrahlung clásico - trayectoria hiperbólica

- En un plasma con densidades de electrones e iones $\{n_e, n_i\}$, al integrar sobre parámetros de impacto, o de manera equivalente sobre $a^2\varepsilon\, d\varepsilon = b\, db$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, dV\, dt} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^6}{3m^2c^3\, v}\, n_e n_i\, \omega\tau \left|H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)\right| H_{i\omega\tau}(i\omega\tau)\,. \tag{127}$$

- Que corresponde con la expresión general (122) con un factor de Gaunt

$$g_{ff}(v,\omega) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}\, \omega\tau |H'_{i\omega\tau}(i\omega\tau)| H_{i\omega\tau}(i\omega\tau)\,. \tag{128}$$

- Presuntamente, para $\omega\tau$, $\omega\tau\varepsilon \ll 1$ se tiene $H_p(i\omega\tau\varepsilon) \to (2/i\pi)\ln(2/\gamma\omega\tau\varepsilon)$, $2\pi(\omega\tau)^2(|H'|^2 + (1-\varepsilon^{-2})|H|^2) \to 8/(\varepsilon^2-1)$.
- El comportamiento asintótico es casí idéntico al correspondiente a deflexiones pequeñas (123),

$$g_{ff}(v,\omega) \simeq \left(\sqrt{3}/\pi\right) \ln\left(2mv^3/\gamma_e\, \omega Z e^2\right) \quad \text{para} \quad \omega \ll mv^3/Ze^2/mv^3\,, \tag{129}$$

con $\gamma_e = e^C \simeq 1.781073$, y $C \simeq 0.57721566\ldots$ la constante de Euler.

4.4.4. Bremsstrahlung térmico - emisividad

- Las expresiones anteriores describen electrones mono-energéticos de velocidad v.
- Poblaciones de electrones se describen con distribuciones de velocidades, $f(\vec{v})$.
- Para electrones en equilibrio termodinámico, $f(\vec{v})\, d^3v \propto \exp\{-mv^2/2kT\}\, v^2 dv$,

$$4\pi j_\nu = \frac{d\mathcal{E}(T)}{dt\, dV\, d\nu} = \int \frac{d\mathcal{E}(v)}{dt dV d\nu} f(v) dv = \frac{32\pi e^6}{3mc^3}\, n_e n_i Z^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}}\, e^{-h\nu/kT}\, \bar{g}_{ff}\,, \tag{130}$$

donde $\bar{g}_{ff}$ es el promedio del factor de Gaunt, j_ν la emisividad (isotrópica).

- Integrando sobre frecuencias se obtiene la potencia radiada por volumen,

$$\frac{d\mathcal{E}(T)}{dtdV} = \frac{32\pi e^6}{3hmc^3}\sqrt{\frac{2\pi kT}{3m}}\, n_e n_i Z^2\, \bar{g}_B = 1.426\times 10^{-27}\, \mathrm{erg\ s^{-1}\ cm^{-3}}\, T^{1/2} n_e n_i Z^2\, \bar{g}_B\,, \tag{131}$$

siendo $\bar{g}_B$ el factor de Gaunt promediado sobre frecuencias. Rybicki-Lightman da una discusión sobre el factor de Gaunt, generalmente de orden uno.

4.4.5. Absorción libre-libre

- El bremsstrahlung (131) es un proceso eficiente de enfriamiento en regiones ionizados, creciente con temperatura ($T^{1/2}$), densidad ($n_e n_i$) y metalicidad (Z^2).
- Siguiendo la ley de Kirchhoff, a todo proceso de emisión le corresponde uno de absorción, con coeficiente $\alpha_\nu = \jmath_\nu / B_\nu(T)$, siendo $\jmath_\nu$ el coeficiente de emisión y $B_\nu(T)$ la función de Planck. Para bremsstrahlung térmico tenemos,

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{4e^6}{3mhc}\, n_e n_i Z^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3m\,kT}}\, \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}\,, \\ &= 3.7 \times 10^8\ \mathrm{cm}^{-1} n_e n_i Z^2\ T^{-1/2} \nu^{-3} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \bar{g}_{ff}\,. \end{aligned} \tag{132}$$

- Útil en modelos de estructura estelar es el coeficiente de absorción medio de Rosseland, dado por el promedio de α^{-1} con $\partial B / \partial T$ cómo función de peso,

$$\alpha_R = 1.7 \times 10^{-25}\,\mathrm{cm}^{-1}\ T^{-7/2} Z^2 n_e n_i\, \bar{g}_R\,, \tag{133}$$

con $\bar{g}_R$ el promedio correspondiente de la función de Gaunt.

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- Son comunes las situaciones que involucran electrones relativistas. Dos consideraciones importantes son:

(1) un tratamiento relativista no cuántico supone deflexiones pequeñas,

$$\frac{v}{c} > Z\alpha \quad \Rightarrow \quad b_{min}^{(1)} = \frac{\hbar}{mv} > b_{min}^{(2)} = \frac{Ze^2}{mv^2},$$

con $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ la constante de estructura fina y $Z\alpha \lesssim 0.001 \to 0.02$ para núcleos más ligeros que el hierro.

(2) El patrón dipolar clásico se altera por el movimiento relativista (beaming).

- En el caso relativista cuántico, el espectro puede estar dominado por unos cuantos fotones de alta energía propagados en la dirección original del electrón.

- Un tratamiento conveniente es considerar el marco de referencia del electrón, aprovechando en el regreso al marco del observador que la potencia radiada es invariante (ecuación 74), al ser $P = d\mathcal{E}/dt$ cociente de dos componentes temporales, que se transforman de misma forma.

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- En el marco propio, el electrón percibe el campo del núcleo en movimiento, dado por los potenciales (57), el cual le proporciona una aceleración,

$$\vec{a}'(t') = -\frac{e\vec{E}'}{m} = \frac{Ze^2}{m}\frac{(\hat{x}\,\gamma v t' + \hat{y}\gamma b)}{[\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2]^{3/2}}\,.$$

- El desarrollo es análogo al no relativista, obteniéndose,

$$\frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'}(v,b) \approx \frac{8Z^2e^6}{3\pi m^2c^3}\frac{1}{b^2v^2} \quad \text{para} \quad \omega' \ll \frac{\gamma v}{b}\,, \tag{134}$$

con $d\mathcal{E}'/d\omega' \to 0$ para $\omega' \gg \gamma v/b$.

- Coincide con (120), con un factor γ en el corte.
- Se integra sobre parámetros de impacto para un sólo electrón, considerando un flujo de núcleos aumentado por γ en la dirección de movimiento, de forma que,

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'd\omega'}(v) = \gamma n_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{d\mathcal{E}'}{d\omega'}\right) 2\pi b db = \frac{16\, n_i\, Z^2 e^6}{3m^2c^3}\frac{\gamma}{v}\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right). \tag{135}$$

describe el espectro de energía radiado por el electrón en su marco propio.

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- Bajo la restricción del tratamiento no cuántico, $b_{min} = \hbar/mv \to \hbar/mc$, sin factor γ, al ser b transversal al movimiento.
- En átomos neutros, $b_{max} \simeq 1.4 a_0 Z^{-1/3}$ por el apantallamiento del núcleo por las cargas electrónicas, con $a_0 = \hbar/me^2$ el radio de Bohr.
- Dado $a_0/(\hbar/mc) = e^2/\hbar c = \alpha$, se obtiene en (135), para $v \to c$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt\, d\omega} = \frac{16\, n_i\, Z^2 e^6}{3m^2c^4} \ln(192\, Z^{-1/3})\,, \tag{136}$$

  con el γ eliminado al regresar al marco del observador.
- La pérdida de energía se obtiene integrando sobre frecuencias, $\omega = 0 \to \mathcal{E}/\hbar$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{16\, Z^2 e^6\, \mathcal{E}}{3\hbar m^2 c^4} \ln(192\, Z^{-1/3})\, n_i\,.$$

4.4.6. Bremsstrahlung relativista

- El resultado es una pérdida exponencial de energía del electrón,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dX} = -\frac{\mathcal{E}}{X_0}, \tag{137}$$

al atravesar un medio con escala característica de densidad de columna,

$$X_0 = \frac{716\,\mathrm{g\,cm^{-2}}\,A}{Z(Z+1.3)\left\{\ln(183\,Z^{-1/3}) + 1/8\right\}}, \tag{138}$$

donde A es la masa atómica del medio. Ec (138) incorpora el cálculo original de Bethe y Heitler.

- Un electrón relativista en el aire emite fotones de alta energía al atravesar una densidad de columna $\sim X_0 = 36.5\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$, mucho menor que el grosor de la atmósfera ($1032\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$).

4.5. Radiación sincrotrón

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme.
4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón.
4.5.3. Radiación sincrotrón por una población de electrones.
4.5.4. Función fuente y auto-absorción.

4.5. Radiación sincrotrón

- La radiación sincrotrón proviene principalmente de electrones de alta energía en campos magnéticos.
- Por su polarización, es indicativa de campos magnéticos.
- Se da en el medio interestelar, remanentes de supernova y galaxias activas.
- Al tratar poblaciones de electrones relativistas requiere ir más allá de la aproximación dipolar.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - movimiento

- El comportamiento de un electrón ($q = -e$) en un campo magnético se describe con la ecuación de movimiento bajo la fuerza de Lorentz (53),

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = -e\ \vec{E}\cdot\vec{v}, \quad \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right). \tag{139}$$

- En un campo puramente magnético ($\vec{E} = 0$), la energía se conserva y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\gamma m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_B\times\vec{v}\,, \tag{140}$$

  con $\vec{\omega}_B \equiv e\vec{B}/\gamma mc$, la frecuencia de sincrotrón ($\vec{\omega}_B = eBc/\mathcal{E}$).
- La frecuencia de sincrotrón se expresa también como $\omega_B = \omega_\ell/\gamma$, siendo $\omega_\ell = eB/mc$ la frecuencia de Larmor, característica del campo magnético.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - movimiento

- Tomando $\vec{B} = B\hat{z}$ obtenemos,

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vec{v}(t) &= v \sin\alpha \left\{\hat{x}\cos(\omega_B t + \phi_0) + \hat{y}\sin(\omega_B t + \phi_0)\right\} + \hat{z}\, v\cos\alpha, \\ \vec{r}(t) &= r_\ell \left\{\hat{x}\sin(\omega_B t + \phi_0) - \hat{y}\cos(\omega_B t + \phi_0)\right\} + \hat{z}\, v\cos\alpha\, t + \vec{r}_0\,. \end{aligned} \tag{141}$$

  donde α es el ángulo[8] entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$, $\{v, \phi_0, \vec{r}_0\}$ son las condiciones iniciales .

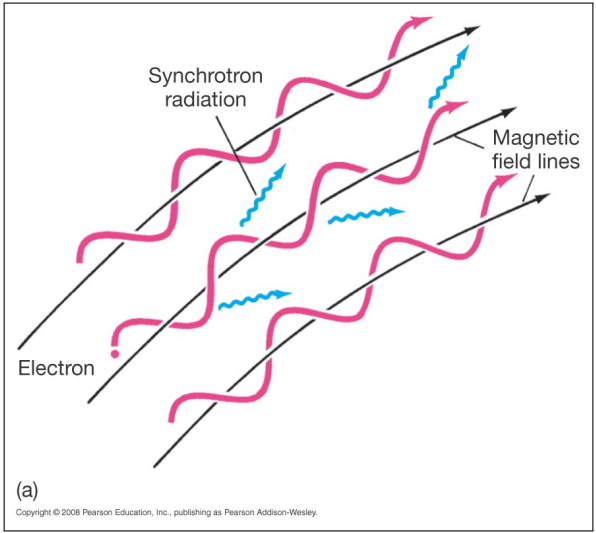
- El movimiento es una superposición de rectilíneo uniforme a lo largo de la línea de campo magnético, y circular uniforme en el plano perpendicular a $\vec{B}$.
- La componente de movimiento circular se escala con el radio de Larmor,

$$r_\ell \equiv v\sin\alpha/\omega_B = p_\perp c/eB\,, \tag{142}$$

  con la rigidez magnética del electrón definida como $p_\perp c/e$.

[8] "pitch angle" en inglés.

4.5.1. Carga en un campo magnético uniforme - potencia radiada



- La potencia radiada está dada por la ec. (74), con $a_{\parallel} = 0$,

$$P(t) = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu a^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a_\perp^2,$$

con
$a_\perp = |\vec{\omega}_B \times \vec{v}| = eB \sin\alpha \, v/\gamma mc.$

- Escribiendo $B_\perp = B \sin\alpha$, se tiene,

$$P(t) = \frac{2e^4 B_\perp^2}{3m^2c^3} \gamma^2 \beta^2 . \qquad (143)$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - potencia radiada

- Al promediar sobre ángulo sólido, suponiendo una población isotrópica de electrones en relación al campo magnético,

$$\left\langle \sin^2 \alpha^2 \right\rangle = 2/3,$$

la potencia promedio queda como,

$$P(t) = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \left\langle B_\perp^2 \right\rangle \gamma^2 \beta^2 = \frac{2}{3} r_e^2 c \left\langle B_\perp^2 \right\rangle \left(\gamma^2 - 1\right) = \frac{4}{3} \sigma_T u_B c \left(\gamma^2 - 1\right), \quad (144)$$

con $r_e = e^2/mc^2$ el radio clásico del electrón[9], $\sigma_T = (8\pi/3) r_e^2$ la sección eficaz de Thompson, $u_B = B^2/8\pi$ la densidad de energía del campo magnético.

- La expresión (144) es análoga a la pérdida de energía de un electrón en un campo de radiación con densidad de energía u_{rad} (190, efecto Compton).

[9] $r_e \simeq 2.8178 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$, $\sigma_T \simeq 6,652 \times 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$.

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - tiempo de vida

- La emisión sincrotrón es un mecanismo eficiente de pérdida de energía.
- De (143), la escala de tiempo de pérdida de energía por radiación sincrotrón es

$$\tau \equiv \left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right)^{-1} \longrightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{m^3c^5}{e^4B_\perp^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\right), \quad \text{para } \gamma \gg 1\,. \tag{145}$$

- Por ejemplo, para electrones de 1 TeV en el campo magnético Galáctico ($3\,\mu$G), el tiempo de pérdida de energía es $\tau \simeq 0.9 \times 10^6$ años, mucho menor que el tiempo de difusión en la Galaxia, el cual depende de r_ℓ.
- Núcleos atómicos de alta energía tienen una masa mucho mayor, por lo que el tiempo de pérdida de energía ($\tau \propto m^3/B^2$) es suficientemente grande como para permitir su difusión por la Galaxia.

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

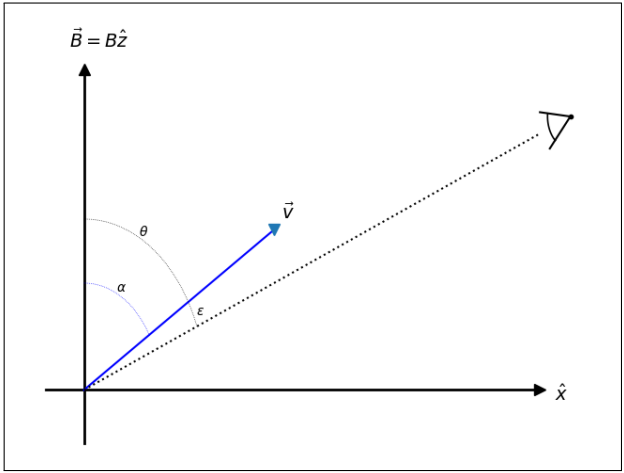


Figura 17: Línea de visión para el tratamiento de la radiación sincrotrón, $\hat{r} = \hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$, con $\theta = \alpha + \epsilon$, siendo α la inclinación de la velocidad de la partícula en relación a la línea de campo magnético, y $\epsilon \sim 1/\gamma$.

$$\vec{v} = v\sin\alpha\left(\hat{x}\cos\omega_B t_e + \hat{y}\sin\omega_B t_e\right) + \hat{z}\, v\cos\alpha,$$
$$\vec{a} = \omega_B\,\hat{z}\times\vec{v} = \omega_B v\sin\alpha\left(-\hat{x}\sin\omega_B t_e + \hat{y}\cos\omega_B t_e\right).$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - potencia y patrón

- La distribución temporal de la emisión sincrotrón por un electrón en un campo magnético, a lo largo del eje $\hat{z}$, está dada por (76).
- Se considera el movimiento descrito por (141) y un observador con línea de visión, $\hat{r} = \hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$.
- En el caso no relativista, $\beta \ll 1$, se tiene una emisión dipolar armónica,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}\left(1 - (\hat{r}\cdot\hat{a})^2\right) = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}\left(1 - \sin^2\theta \sin^2\omega_B t_e\right),$$

  con un término de fase, $t_e = t - r/c$, a primer orden.
- La expresión general es

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{(1 - \beta\sin\alpha\sin\theta\cos\omega_B t_e - \beta\cos\alpha\cos\theta)^2 - \sin^2\theta\sin^2\omega_B t_e/\gamma^2}{(1 - \beta\sin\alpha\sin\theta\cos\omega_B t_e - \beta\cos\alpha\cos\theta)^6}\right\}.$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - forma temporal

- La emisión es máxima para una línea de visión que coincide momentáneamente con la velocidad, $\theta = \alpha$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{(1 - \beta \sin^2\alpha \cos\omega_B t_e - \beta \cos^2\alpha)^2 - \sin^2\alpha \sin^2\omega_B t_e/\gamma^2}{\left(1 - \beta + \beta \sin^2\alpha\,(1 - \cos\omega_B t_e)\right)^6} \right\}$$

- En el caso altamente relativista, alrededor de la fase de máxima emisión, y con la transformación del tiempo retardado,

$$\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2, \quad \cos\omega_B t_e \simeq 1 - \omega_B^2 t_e^2/2, \quad t_e \simeq 2\gamma^2 t,$$

se obtiene

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}\, 16\gamma^8 \frac{(1 - (\sin\alpha\,\gamma\omega_B t_e)^2)^2}{(1 + (\sin\alpha\,\gamma\omega_B t_e)^2)^6} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3}\, 16\gamma^8 \frac{(1 - (2\sin\alpha\,\gamma^3\omega_B t)^2)^2}{(1 + (2\sin\alpha\,\gamma^3\omega_B t)^2)^6}.$$

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

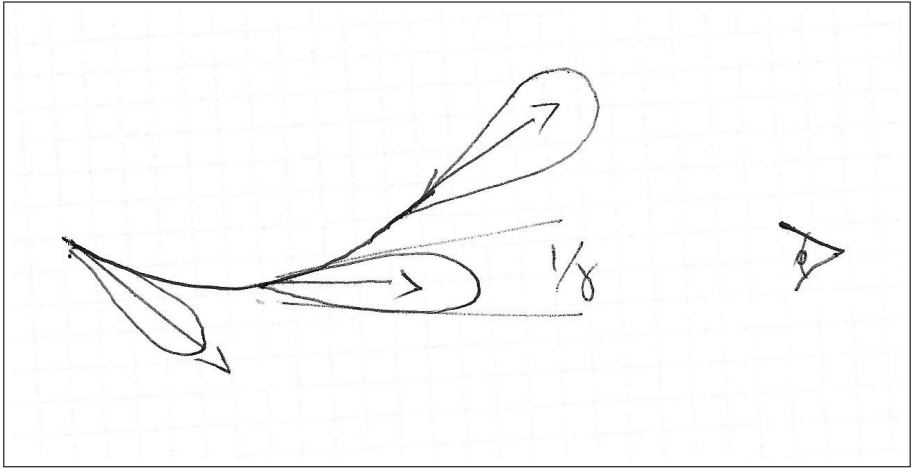


Figura 18: Ilustración del proceso sincrotrón. La emisión se confina a un haz de ancho $1/\gamma$ barriendo la línea de visión con frecuencia ω_B en tiempo retardado, y $\omega_c \sim \gamma^2 \omega_B$ para el observador.

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón - forma temporal

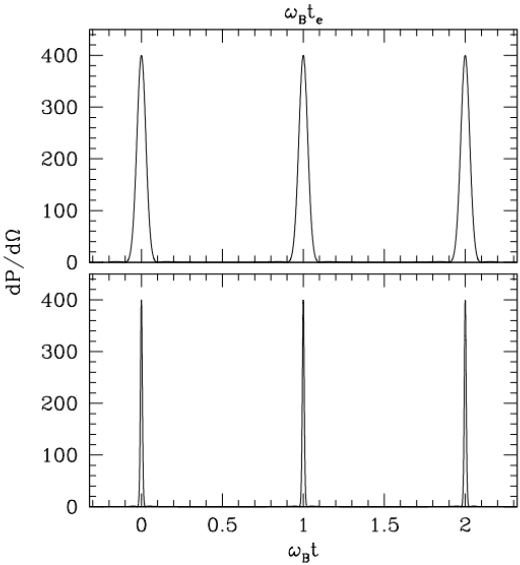


Figura 20: Pulso de la emisión sincrotrón visto en función del tiempo retardado, t_e, y por el observador, t. En este ejemplo se tomó $\beta = 0.8 \Rightarrow \gamma \simeq 1.67$. El pulso en t_e tiene duración $\Delta t_e \propto 1/\gamma$, mientras que en t tiene duración $\Delta t_e \propto 1/\gamma^3$. Para valores grandes de γ, los pulsos aparecen *extremadamente* angostos.

La emisión se da en pulsos de ancho $\Delta t \approx 2\pi/\gamma^3\omega_B \sin\alpha$, repetidos con periodo $T = 2\pi/\omega_B$. El espectro va formalmente, en frecuencias discretas $\omega_n = n\omega_B$, desde ω_B hasta $\gamma^3\omega_B \sin\alpha$, con $n = 1 \rightarrow \gamma^3$.

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- La estimación del espectro requiere la expresión (79),

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})e^{i\omega(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c)}dt\right|^2 .$$

  La línea de visión es $\hat{r} = \hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$, con $\theta = \pi/2$ para el plano xy (figura 17).
- El vector

$$\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta}) = -\hat{e}_1\,\beta\sin\alpha\sin\omega_B t + \hat{e}_2\,\beta\left(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\cos\omega_B t\right),$$

  define dos componentes de polarización, A_1, A_2, en direcciones perpendiculares (por definición) a la línea de visión $\hat{r}$,

$$\hat{e}_1 = \hat{y}, \qquad \hat{e}_2 = \hat{r}\times\hat{e}_1 = \hat{x}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta.$$

- Lo que permite escribir la expresión (79) como,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2\beta^2}{4\pi^2 c}\left(|A_1(\theta,\omega)|^2 + |A_2(\theta,\omega)|^2\right). \tag{148}$$

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- Para $\alpha = \pi/2, \theta = \alpha + \Delta\theta$, y el límite $\{\Delta\theta, \omega_B t\} \ll 1 \ll \gamma$, se considera

$$\sin\theta \simeq 1 - \Delta\theta^2/2, \quad \beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2, \quad \sin x/x \simeq 1 - x^2/3!\,,$$

de forma que el término en la exponencial de (79) queda como,

$$i\omega\left(t - \hat{r}\cdot\vec{r}_e(t)/c\right) = t\left(1 - \beta\sin\theta\sin(\omega_B t)/\omega_B t\right) \approx i\left(1/2\gamma^2 + \theta^2/2 + \omega_B^2 t^2/6\right),$$

- De donde,

$$\begin{aligned} A_1(\theta,\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\omega_B t \cdot \exp\left\{i\omega t\left(1 - \beta\sin\theta\,\sin(\omega_B t)/\omega_B t\right)\right\} dt \\ &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_B t \cdot \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \Delta\theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3}\right)\right\} dt, \\ A_2(\theta,\omega) &= \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_B t \cdot \exp\left\{i\omega t\left(1 - \beta\sin\theta\,\sin(\omega_B t)/\omega_B t\right)\right\} dt \\ &\approx \Delta\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \Delta\theta^2 + \frac{\omega_B^2 t^2}{3}\right)\right\} dt. \end{aligned}$$

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- Cambiando variables $q = \gamma\omega_B t/(1+\gamma^2\Delta\theta^2)^{1/2}$, $x = (\omega/3\gamma^3\omega_B)(1+\gamma^2\Delta\theta^2)^{3/2}$,

$$A_1(\theta,\omega) \approx \frac{1+\gamma^2\Delta\theta^2}{\gamma^2\omega_B}\int_{-\infty}^{+\infty} q\exp\left\{i\frac{3}{2}x(q+q^3/3)\right\}dq \approx \frac{1+\gamma^2\Delta\theta^2}{\gamma^2\omega_B}\frac{1}{\sqrt{3}}K_{2/3}(x),$$

$$A_2(\theta,\omega) \approx \Delta\theta\frac{\left(1+\gamma^2\Delta\theta^2\right)^{1/2}}{\gamma\omega_B}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\frac{3x}{2}\left(q+\frac{q^3}{3}\right)\right\}dq \approx \Delta\theta\frac{\left(1+\gamma^2\Delta\theta^2\right)^{1/2}}{\gamma\omega_B}\frac{K_{1/3}(x)}{\sqrt{3}},$$

con K_r la función modificada de Bessel de orden r.

- Definiendo la frecuencia de corte,

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^3\omega_B\,, \tag{149}$$

la distribución espectral y angular de la emisión queda como,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{3\,e^2}{16\pi^2 c}\gamma^2\beta^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\left(1+\gamma^2\theta^2\right)^2\left[K_{2/3}^2(x)+\frac{\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2}K_{1/3}^2(x)\right], \tag{150}$$

con $x = (\omega/2\omega_c)(1+\gamma^2\theta^2)^{3/2}$.

4.5.2. Radiación sincrotrón - distribución angular y espectral

- Integrando sobre frecuencias se obtiene la distribución angular de la emisión,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{7}{16}\frac{e^2 c}{\omega_B}\frac{\gamma^5}{(1+\gamma^2\theta^2)^{5/2}}\left[1+\frac{5}{7}\left(\frac{\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2}\right)\right]. \tag{151}$$

  La emisión consiste en un pulso de ancho $\Delta\theta \approx 1/\gamma$ amplificado por γ^5 (fig. 21).

- Al integrar sobre ángulo sólido se obtiene el espectro emitido en función de ω/ω_c,

$$P(\omega) = \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 B \sin\alpha}{2\pi\, mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{con} \quad F(x) \equiv x\int_x^\infty K_{5/3}(y)\, dy\,. \tag{152}$$

- El espectro se separa en componentes perpendicular y paralela, $P = P_\perp + P_\parallel$, donde

$$\left\{\begin{array}{c} P_\perp(\omega) \\ P_\parallel(\omega) \end{array}\right\} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 B \sin\alpha}{4\pi\, mc^2}\left\{\begin{array}{c} F(\omega/\omega_c) + G(\omega/\omega_c) \\ F(\omega/\omega_c) - G(\omega/\omega_c) \end{array}\right\}. \tag{153}$$

  $F(x)$, $G(x) \equiv x\, K_{2/3}(x)$ son las funciones de emisión sincrotrón (Westfold 1959).

4.5.2. Radiación sincrotrón por un electrón

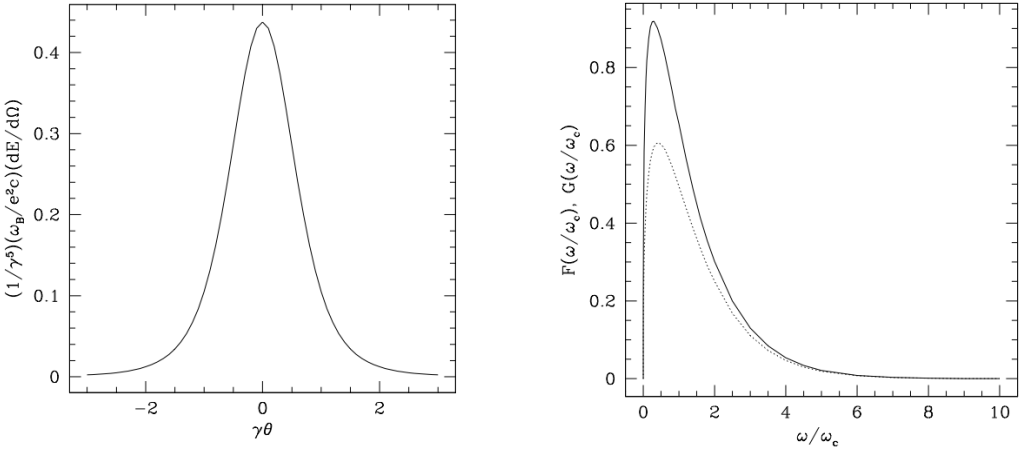


Figura 21: *Izquierda:* distribución angular de la emisión sincrotrón, limitada a un cono de apertura $\Delta\theta \sim 1/\gamma$. *Derecha:* la distribución espectral está dada por las funciones $F(\omega/\omega_c)$ -línea sólida- y $G(\omega/\omega_c)$ -línea punteada- con la frecuencia de corte $\omega_c = (3/2)\gamma^2(EB_\perp/mc)$.

4.5.2. Radiación sincrotrón - función sincrotrón

- La función

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(y)\, dy\,,$$

mostrada en la figura (21), tiene comportamientos asintóticos,

$$\begin{aligned} F(x) &\approx \frac{4\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad \text{para} \quad x \ll 1\,, \\ F(x) &\approx (\pi/2)^{1/2}\, e^{-x} x^{1/2} \quad \text{para} \quad x \gg 1\,. \end{aligned}$$

- El grado de polarización de la radiación es

$$\Pi(\omega) = \frac{P_\perp(\omega) - P_\parallel(\omega)}{P_\perp(\omega) + P_\parallel(\omega)} = \frac{G(\omega/\omega_c)}{F(\omega/\omega_c)}\,. \tag{157}$$

- El caso general considera la inclinación con el campo magnético, resultando en

$$\omega_c = 3\gamma^3 \omega_B \sin\alpha/2\,.$$

(*Rybicki §6; Jackson §14*)

4.5.3. Radiación sincrotrón de una población de electrones

- El espectro de un electrón, $P_e(\omega)$, se emplea para determinar la emisión total de una región. Las poblaciones de electrones son frecuentemente no térmicas y se describen con leyes de potencias en energías, o de valores de γ,

$$N(E)\,dE \propto E^{-p} \quad \Rightarrow \quad N(\gamma)\,d\gamma = C\,\gamma^{-p}\,d\gamma\,, \tag{158}$$

  con p típicamente en el rango (2,3).
- El espectro está dado por:

$$P(\omega) = C\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P_e(\omega)\,\gamma^{-p}\,d\gamma \;\propto\; \omega^{-(p-1)/2}\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,x^{(p-3)/2}\,dx\,, \tag{159}$$

  donde $x = \omega/\gamma^2\omega_\ell$.
- Para un rango espectral amplio, $\gamma_1 \ll \gamma_2$,

$$P(\omega) \propto \omega^{-s} = \omega^{-(p-1)/2}\,. \tag{160}$$

4.5.3. Radiación sincrotrón de una población de electrones

- En el límite $x_1 \to 0, x_2 \to \infty$ la integración de (152) da,

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}\,C}{2\pi(p+1)}\,\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\,\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{e^2\omega_\ell}{c}\right)\left(\frac{\omega}{3\omega_\ell}\right)^{-(p-1)/2}, \quad (161)$$

  recordando $\omega_\ell = eB\sin\alpha/mc$.
- El índice espectral s de la radiación se relaciona con el de la distribución de electrones, p a través de $s = (p-1)/2$.
- La polarización resultante es,

$$\Pi = \frac{p+1}{p+7/3}\,. \quad (162)$$

4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- A un proceso de emisión le corresponde el proceso recíproco de absorción.
- En equilibrio termodinámico, coeficientes de absorción y emisión se relacionan mediante la ley de Kirchhoff, $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$, con B_ν la función de Planck.
- Sincrotrón no ocurre normalmente en equilibrio. La relación entre emisión y absorción es mediante la función fuente, $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$.
- La definición estadística de la función fuente para transiciones entre estados $1 \to 2$ con poblaciones $n_1 = n(E_1), n_2 = n(E_2)$, pesos estadísticos $g_1 = g(E_1), g_2 = (E_2)$,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{n_1 g_2/n_2 g_1 - 1}, \tag{163}$$

- Para electrones relativistas descritos por una ley de potencias $n(E) \propto E^{-p}$ se tiene $g(E) \propto E^2$, de donde,

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{(E_1/E_2)^{-p+2} - 1} = \frac{2h\nu^3/c^2}{((E + h\nu)/E)^{p-2} - 1} \simeq \frac{2h\nu^3/c^2}{(p-2)(h\nu/E)},$$

donde $h\nu \ll E$, siendo E la energía de un electrón que emite a una frecuencia ν.

4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- Dado que la mayor parte de la emisión ocurre cerca de la frecuencia de corte,

$$2\pi\nu \simeq \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_\ell = \frac{3}{2}\left(E/mc^2\right)^2\left(eB/mc\right) \quad \Rightarrow \quad E \simeq mc^2\left(\nu/\nu_\ell\right)^{1/2}$$

  con $\omega_\ell = 2\pi\nu_\ell = eB/mc$ la frecuencia de Larmor.
- La función fuente queda dada por,

$$S_\nu \simeq \frac{m\,\nu^{5/2}}{\nu_\ell^{1/2}(p/2-1)} \propto \nu^{5/2}\,B^{-1/2}, \tag{164}$$

- Dado $j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$, el coeficiente de absorción es $\alpha_\nu = j_\nu/S_\nu \propto \nu^{-(p+4)/2}$.
- La absorción predomina a frecuencias bajas. Se puede definir cierta ν_m tal que,

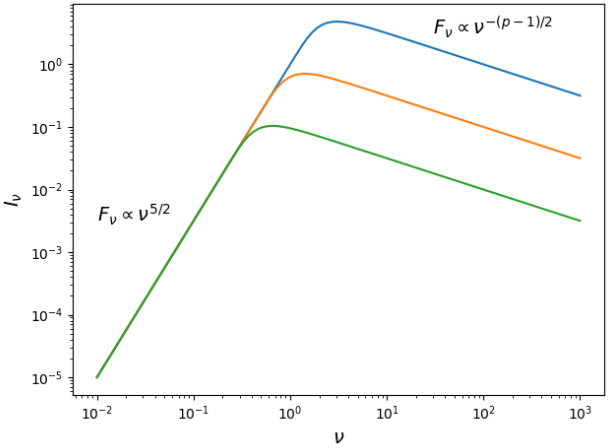
– si $\nu \ll \nu_m$ el medio es ópticamente grueso: $I_\nu \to S_\nu \propto \nu^{5/2}$;
– si $\nu \gg \nu_m$ el medio es ópticamente delgado: $I_\nu \to j_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$;
– en general: $I_\nu \approx S_\nu\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right)$.

4.5.4. Función fuente y auto-absorción

- El valor ν_m contiene información sobre la región emisora.
- El flujo de una esfera ópticamente gruesa de radio R está dado por

$$F_\nu = S_\nu \, \pi\theta^2,$$

con $\theta = R/r$ el tamaño angular.
- Mediciones interferométricas, muchas veces en radio, permiten medir θ, así como ν_m y F_m.
- Empleando (164) se puede deducir el campo magnético.



4.6. Efecto Compton

4.6.1. Dispersión de Thomson.
4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo
4.6.3. El efecto Compton - caso general, centro de momento.
4.6.4. Efecto Compton inverso.
4.6.5. Campos de radiación.

4.6.1. Dispersión de Thomson

- La dispersión de Thomson, o dispersión electrónica, se refiere a la dispersión de una onda plana electromagnética por un electrón libre.
- La dispersión de Thomson describe el caso no relativista ($v \ll c$), despreciando la acción del campo magnético, de orden $\sim v/c$.
- La onda afecta el movimiento del electrón de acuerdo a la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \approx -e\vec{E}\,.$$

- Para una onda monocromática, el movimiento del electrón, $\vec{r}_e(t)$, está descrito por

$$m\ddot{\vec{r}}_e \simeq -e\,\hat{\varepsilon}E\,e^{i(kz-\omega t)}, \tag{165}$$

  para $\vec{k} = k\hat{z}$, con $\hat{\varepsilon} \perp \vec{k}$ el vector de polarización del campo eléctrico.
- Si se restringe el movimiento al plano xy, el término e^{ikz} representa una fase.

4.6.1. Dispersión de Thomson

- La potencia y el patrón de emisión se estiman bajo la aproximación dipolar

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{|\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{d}})|^2}{4\pi c^3} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \left\{ 1 - (\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon})^2 \right\} , \tag{166}$$

  con $\vec{d} = -e\vec{r}_e$ el momento dipolar del electrón $\Rightarrow$ $\ddot{\vec{d}} = -\hat{\varepsilon}\, e\ddot{r}_e$.
- La potencia media por unidad de ángulo sólido queda como

$$\left\langle \frac{dP(t)}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c|E|^2}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2 \right) . \tag{167}$$

- Podemos cuantificar el efecto de dispersión mediante la comparación entre el flujo de energía de la onda plana incidente y la emisión dipolar resultante, a través de la *sección eficaz*, $d\sigma/d\Omega$, en su forma diferencial:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(1 - |\hat{r} \cdot \hat{\varepsilon}|^2 \right) . \tag{168}$$

4.6.1. Dispersión de Thomson

- Para un observador $\hat{r} = \hat{z}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta$, polarización lineal $\hat{\varepsilon} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$, se obtiene un patrón dipolar, $\propto \sin^2\phi + \cos^2\phi\cos^2\theta$.
- Una onda con polarización circular, $\hat{\varepsilon} = (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$, resulta en un patrón dipolar,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\theta). \tag{169}$$

- Radiación no polarizada tiene un patrón dipolar, al integrar el caso lineal sobre ϕ.
- La integración sobre ángulo sólido resulta en la sección eficaz de Thomson,

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2\,, \tag{170}$$

  con $r_e = e^2/mc^2 = 2.8178 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$, el radio clásico del electrón.
- La luz dispersada tiene la misma frecuencia que la incidente.

- La descripción del efecto Compton introduce un cambio en frecuencia.

4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo; dispersión electrónica

- El efecto Compton describe la dispersión de un electrón y un fotón, $\gamma e \to \gamma e$, como una colisión elástica $\Rightarrow$ intercambio de energía y momento,

$$p_{e(i)} + p_{\gamma(i)} = p_{e(f)} + p_{\gamma(f)} \,. \tag{171}$$

- La dispersión electrónica ("electron scattering") corresponde al caso de energía inicial del electrón despreciable.
- Para un electrón inicialmente en reposo,

$$\begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/c \\ \hat{k}_0\,\hbar\omega_0/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{\beta}c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hbar\omega_1/c \\ \hat{k}_1\,\hbar\omega_1/c \end{pmatrix},$$

se obtiene la fórmula de Compton, relacionando energías inicial y final del fotón,

$$\hbar\omega_1 = \frac{\hbar\omega_0}{1 + (\hbar\omega_0/mc^2)\left(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1\right)} \,. \tag{172}$$

4.6.2. Efecto Compton - electrón en reposo: dispersión electrónica

- Expresado en términos de la longitud de onda,

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta). \tag{173}$$

  El ángulo de dispersión está dado por $\cos\theta = \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1$, siendo $\lambda_c = h/mc$ la longitud de onda de Compton[10].
- $\omega_1 \leq \omega_0 \Rightarrow$ el fotón cede energía al electrón, inicialmente en reposo.
- La dispersión electrónica es particularmente importante en interiores estelares y plasmas calientes densos en general.

[10] $\lambda_c = 0.02426\,\text{Å}$.

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz diferencial

- El resultado de la interacción (172) depende del ángulo θ, dado de manera probabilística por la sección eficaz de Klein-Nishina,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\omega_0, \theta) = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \left[\frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_0} - \sin^2\theta\right], \tag{174}$$

  con ω_1/ω_0 dado por (172).
- Para $\omega_1/\omega_0 \simeq 1$ se recobra la sección eficaz de Thomson, $\propto (1 + \cos^2\theta)$.
- Al substituir (172) en (174), se puede expresar $d\sigma/d\Omega$ en función de $\cos\theta$ y $x = \hbar\omega_0/mc^2$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{1}{1 + x(1 - \cos\theta)} + \frac{1}{(1 + x(1 - \cos\theta))^3} - \frac{\sin^2\theta}{(1 + x(1 - \cos\theta))^2}\right]. \tag{175}$$

- El comportamiento de $d\sigma/d\Omega(\theta)$ se ilustra en la figura 22. Al aumentar ω_0, se pasa de un comportamiento dipolar a dispersiones con θ pequeñas.

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz total

- La expresión (175) es integrable analíticamente, resultando en la sección eficaz total, en términos de $x = \hbar\omega_0/mc^2$,

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_T \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x}\ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] . \tag{176}$$

- En el régimen no relativista, $x \ll 1$,

$$\sigma \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26}{5}x^2 + \dots \right) . \tag{177}$$

- En el regimen altamente relativista, $x \gg 1$, la sección eficaz decrece con la energía,

$$\sigma \approx \sigma_T \frac{3}{8x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right) . \tag{178}$$

4.6.2. Efecto Compton - sección eficaz

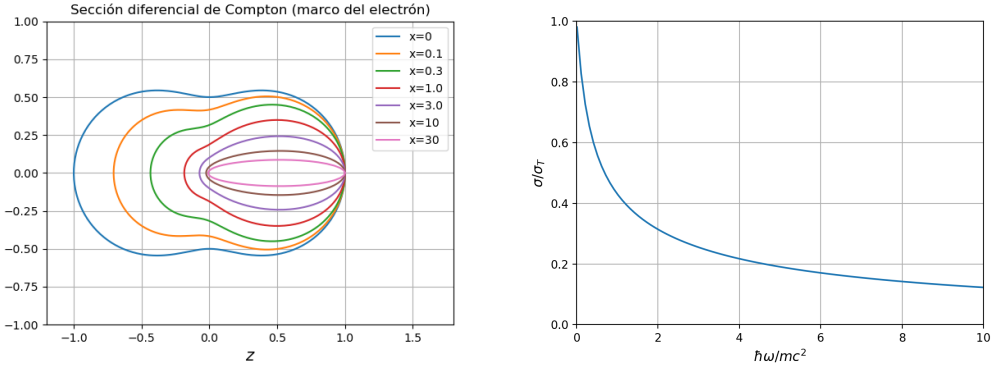


Figura 22: *Izquierda:* sección diferencial de Klein-Nishina para electrones en reposo (marco de referencia del electrón). El fotón original va de izquierda a derecha ($\hat{k}_0 = \hat{z} \Rightarrow \theta = 0$). Los valores de $x = \hbar\omega_0/mc^2$ están indicados. El máximo de $d\sigma/d\Omega$ corresponde a $2r_e^2$. *Derecha:* sección eficaz total.

4.6.3. Efecto Compton - caso general

- Los electrones son ubicuos en entornos astrofísicos y sus interacciones con fotones son frecuentes.
- La interacción electrón - fotón se describe con la conservación de energía y momento,

$$p_0^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/c + \gamma_0 mc \\ \hbar\omega_0 \hat{k}_0/c + \gamma_0 \vec{\beta}_0 mc \end{pmatrix} = p_1^\alpha = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1/c + \gamma_1 mc \\ \hbar\omega_1 \hat{k}_1/c + \gamma_1 \vec{\beta}_1 mc \end{pmatrix}, \tag{179}$$

  con los sub-índices $0, 1$ antes y después de la interacción, respectivamente.
- La interacción tiene invariante:

$$p_\alpha p^\alpha = -m^2c^2 - 2\gamma\hbar\omega m \left(1 - \hat{k} \cdot \vec{\beta}\right). \tag{180}$$

- Simplificamos la notación[11] con $\omega \longrightarrow \hbar\omega$, $\gamma \longrightarrow \gamma mc^2$, para re-escribir (179),

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \gamma_0 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \gamma_1 \\ \omega_1 \hat{k}_1 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix}. \tag{181}$$

[11] equivalente a $\hbar/mc^2 = 1$.

4.6.3. Efecto Compton - caso general

- Al eliminar γ_1, $\gamma_1\vec{\beta}_1$, obtenemos la expresión general para la interacción Compton,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0\omega_0\left(1-\vec{\beta}_0\cdot\hat{k}_0\right)}{\gamma_0\left(1-\vec{\beta}_0\cdot\hat{k}_1\right)+\omega_0\left(1-\hat{k}_0\cdot\hat{k}_1\right)}. \tag{182}$$

- Casos particulares:

- un electrón en reposo: $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 1$, recuperamos la expresión (172).
- $\hat{k}_1 = \hat{k}_0$ entonces $\omega_1 = \omega_0$, y no hay dispersión.
- electrones no relativistas, como en la dispersión del fondo de microondas (CMB) por electrones en equilibrio térmico a muy alta temperatura en cúmulos de galaxias, en el denominado efecto Sunyaev-Zeldovich.

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

- La interacción Compton se describe frecuentemente en el centro de momento. La transformación al CM es,

$$\vec{\beta}_t = \vec{p}c/E = \frac{\omega_0 \hat{k}_0 + \gamma_0 \vec{\beta}_0}{\omega_0 + \gamma_0} \quad \Rightarrow \quad \gamma_t = \frac{\omega_0 + \gamma_0}{\sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)}}. \tag{183}$$

- Por construcción, al transformar obtenemos,

$$p^{\alpha\prime} = \begin{pmatrix} \omega_0' + \gamma_0' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' + \gamma_1' \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{184}$$

con $\sqrt{-p_{\alpha\prime}p^{\alpha\prime}} = \omega_0' + \gamma_0' = \sqrt{1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)} = \omega_1' + \gamma_1'$.

- Momento total nulo y conservación de energía implican,

$$\gamma'\vec{\beta}' + \omega'\hat{k}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \sqrt{1 + \omega'^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1' = \omega_0',\ \gamma_1' = \gamma_0'. \tag{185}$$

- La interacción no modifica las energías del fotón y electrón en el centro de momento, siempre relacionadas mediante (185).

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

- La interacción en el CM corresponde a una rotación del vector de propagación,

$$\hat{k}_0' \to \hat{k}_1',$$

  descrita por la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina, ahora referida al CM ($d\Omega \to d\Omega'$).
- $\omega \ll 1 \Rightarrow$ dipolar; $\omega \gg 1 \Rightarrow d\sigma/d\Omega$ aumenta hacia $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \hat{k}_1' = -\hat{k}_0'$.
- La sección eficaz total es invariante y dada por (176), notando que,

$$-p_{\alpha'}p^{\alpha'} = 1 + 2\gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0) = 2x + 1\,,$$

  donde $x = \gamma_0\omega_0(1 - \hat{k}_0 \cdot \vec{\beta}_0)$.

4.6.3. Efecto Compton - centro de momento

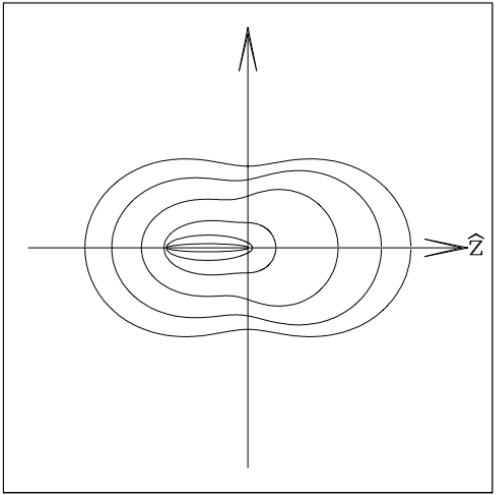


Figura 23: Sección diferencial de Klein-Nishina en el centro de momento. Los contornos, de externo a interno, son para $\omega = 0.0, 0.1, 0.3, 1.0, 3.0, 10.0$. El contorno más interno muestra la tendencia al "rebote" $\cos\theta = -1$ en altas energías, así como la disminución de σ. El contorno más externo corresponde a la dispersión de Thomson.

4.6.4. Efecto Compton inverso

- El *efecto Compton inverso* describe la transferencia de energía de electrones altamente relativistas a fotones de menor energía, $\gamma_0 \gg \text{máx}(1, \omega_0)$.
- Para $\gamma_0 \gg \omega_0$, el fotón dispersado se propaga en dirección muy cercana a la original del electrón. Al aproximar $\hat{k}_1 \simeq \hat{\beta}_0$ en (182), se obtiene,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_0 \omega_0 \left(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \hat{k}_0\right)}{\gamma_0 \left(1 - \beta_0\right) + \omega_0 \left(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{\beta}_0\right)} \simeq \frac{2\gamma_0^2 \omega_0 \left(1 - \beta_0 \cos\theta_0\right)}{1 + 2\gamma_0 \omega_0 \left(1 - \cos\theta_0\right)} . \tag{188}$$

Se distinguen dos casos:

1. $\gamma_0 \omega_0 \left(1 - \cos\theta_0\right) \ll 1 \Rightarrow \omega_1 \simeq 2\gamma_0^2 \omega_0 \left(1 - \beta_0 \cos\theta_0\right)$; el fotón adquiere una energía del orden $2\gamma^2 \omega_0$, acotada a $\omega_1 \lesssim 4\gamma^2 \omega_0$.
2. $\gamma_0 \omega_0 \left(1 - \cos\theta_0\right) \gg 1 \Rightarrow \omega_1 \simeq \gamma_0$: el fotón adquiere prácticamente toda la energía del electrón. En este régimen la sección eficaz disminuye y se da la *supresión de Klein-Nishina*.

4.6.4. Efecto Compton inverso

- La expresión (188) describe el espectro de fotones obtenido de la colisión entre electrones y fotones mono-energéticos, al considerar $\cos\theta_0 \in \{-1, +1\}$.
- El efecto Compton inverso es el proceso electromagnético que produce los fotones de más alta energía ($\gtrsim 100\,\mathrm{TeV}$).
- La producción de rayos gamma de energía aún mayor puede ocurrir en colisiones entre hadrones.

4.6.5. Efecto Compton - campos de radiación

- La transferencia de energía a fotones de un campo de radiación resulta en un proceso de pérdida de energía para electrones relativistas.
- En cada interacción el electrón pierde la misma energía que ganó el fotón*,

$$\Delta(\gamma mc^2) \simeq -h\nu \left\{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)-1\right\}, \tag{189}$$

  conforme con (188) para $\gamma\omega \ll 1$, con la notación $\gamma \to \gamma mc^2$, $\omega \to h\nu$.
- El electrón ve un flujo de fotones $n_\nu c\,(1-\beta\cos\theta)$, resultando en,

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= \int_{-1}^{+1} h\nu \left\{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)-1\right\} \sigma_T\, n_\nu c\,(1-\beta\cos\theta)\, d\nu\, \frac{d\cos\theta}{2}, \\ &= \frac{4}{3}\sigma_T\, u_{rad}\, c\,(\gamma^2-1), \end{aligned} \tag{190}$$

  con $u_{rad} = \langle h\nu \rangle$ la densidad de energía del campo de radiación. Esta expresión es análoga a la pérdida de energía por radiación sincrotrón (144).
- Poblaciones de electrones relativistas pierden energía tanto por sincrotrón como por Compton, de acuerdo a la densidad de energía de cada campo.

4.6.5. Efecto Compton - campos de radiación

- La interacción con un campo de radiación puede ser con electrones relativistas o térmicos.
- La combinación de emisión sincrotrón con Compton inverso da lugar a los escenarios SSC (Self Synchrotron Compton).

4.7. Procesos fotón - electrón a altas energías

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas.
4.7.2. El canal de Compton.
4.7.3. Producción de pares.
4.7.4. Aniquilación electrón-positrón; positronio.
4.7.5. Interacciones de un vértice.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - interacciones

- La descripción de interacciones entre pares de partículas, como el efecto Compton, se basa en la conservación de energía y momento, que para,

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4\,, \tag{191}$$

podemos escribir como

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0\,, \tag{192}$$

donde $q_\jmath$ representa $\pm$ el cuadrivector de energía-momento de la $\jmath$-ésima partícula.

- (192) puede describir (191) o, intercambiando signos,

$$(\mathrm{I}) : 1 + 2 \to 3 + 4, \quad (\mathrm{II}) : 1 + \bar{3} \to \bar{2} + 4, \quad (\mathrm{III}) : 1 + \bar{4} \to 3 + \bar{2}, \tag{193}$$

donde $\bar{\jmath}$ representa la anti-partícula de $\jmath$.

- En una descripción más general, las interacciones (193), y sus inversas, representan los canales de un mismo proceso genérico.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - interacciones

- Así, los tres canales de interacción entre dos electrones y dos fotones son:

$$\begin{cases} \text{(I)} & \gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^- & \Longrightarrow & \text{efecto Compton,} \\ \text{(II)} & \gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^- & \Longrightarrow & \text{producción de pares,} \\ \text{(III)} & e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma & \Longrightarrow & \text{aniquilacion de pares.} \end{cases} \tag{194}$$

- La interacción entre electrones tiene los canales,

$$e^-e^- \to e^-e^-, \quad e^+e^- \to e^+e^-, \quad e^+e^+ \to e^+e^+.$$

- La interacción entre electrones y muones,

$$e^-\mu^- \to e^-\mu^-, \quad e^+e^- \to \mu^+\mu^-, \quad \mu^+\mu^- \to e^+e^-.$$

- La descripcion física de estos procesos emplea *diagramas de Feynman*, construidos conectando secuencialmente la interacción de base, de acuerdo a algunas reglas.

4.7.1. Interacciones, canales, diagramas - diagrama base

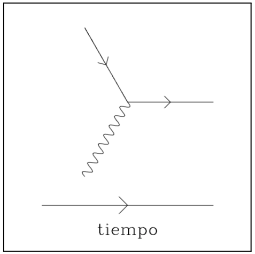


Figura 24: Proceso electrodinámico básico: la absorción de un fotón (línea ondulada) por un electrón (flecha). Al rotar el diagrama se describe la creación de un par e^+e^- por un fotón, con la convención de que una flecha en reversa representa una anti-partícula; o la aniquilación de un par e^+e^- en un fotón. Los diagramas base no conservan simultáneamente energía y momento.

- La interacción mostrada en el diagrama básico representa la emisión o absorción de un fotón (línea ondulada) por un electrón (flecha de izquierda a derecha).
- El diagrama base no representa una interacción real, al no conservar energía y momento simultáneamente.
- Para un electrón con velocidad $\vec{\beta}c$ se debería cumplir

$$-p_\alpha p^\alpha = (\gamma+\omega)^2 - (\gamma\vec{\beta}+\omega\hat{k})^2 = \gamma + 2\gamma\omega(1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}) = 1,$$

lo cual solo es posible si $\gamma = 1, \omega = 0 \Rightarrow$ no hay emisión.

4.7.1. **Interacciones, canales, diagramas** - diagramas de Feynman

- El diagrama (24) es la base de la representación de las interacciones al combinarse en distintas configuraciones.
- Aún cuando los vértices no cumplan la conservación de energía y momento, las combinaciones de diagramas sí lo hacen.
- La figura (25) muestra los diagramas correspondientes a las interacciones entre electrons y fotones. Las partículas involucradas en la interacción se encuentran en los extremos; las partículas entre vértices son "virtuales".
- Los diagramas de Feynman se emplean en el cálculo de secciones eficaces, relacionando las correspondientes a los distintos canales de una interacción genérica. Sus valores son típicamente del mismo orden ($\sim r_e^2$) y su cálculo se hace de manera análoga de acuerdo al formalismo de la electrodinámica cuántica.

(*Griffiths; Berestetskii*)

4.7.2. El canal de Compton

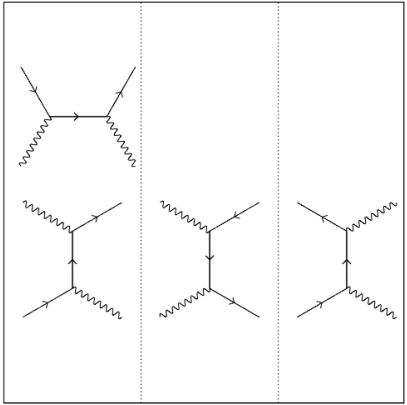


Figura 25: El canal de Compton incluye el efecto Compton ($\gamma e \to \gamma e$), la producción de pares electrón-positrón ($\gamma\gamma \to ee$) y su aniquilación ($ee \to \gamma\gamma$). A la izquierda dos diagramas representan la dispersión Compton; en el centro la producción de un par por dos fotones; y a la derecha la aniquilación una partícula con su anti-partícula para producir dos fotones.

4.7.3. Producción de pares - cinemática

- La producción de un par electrón-positrón por dos fotones, $\gamma\gamma \to e^+e^-$, corresponde al diagrama central mostrado en la figura (25).
- Empleando unidades con $\hbar = mc^2 = 1$, la conservación energía-momento es

$$\begin{pmatrix} \omega_0 + \omega_1 \\ \omega_0 \hat{k}_0 + \omega_1 \hat{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \gamma_1 \\ \gamma_0 \vec{\beta}_0 + \gamma_1 \vec{\beta}_1 \end{pmatrix},$$

con invariante

$$-p_\alpha p^\alpha = 2\omega_0\omega_1(1 - \hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1) = 2 + 2\gamma_0\gamma_1(1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_1)\,. \tag{195}$$

- La relación (195) da lugar a la condición umbral $\omega_0\omega_1 > 1$, o,

$$\hbar\omega_0\,\hbar\omega_1 > \left(mc^2\right)^2 \approx 0.25 \times 10^{12}\,\mathrm{eV}^2. \tag{196}$$

- El proceso se pude describir en el centro de momento, con el invariante dado por,

$$-p_\alpha p^\alpha = -4\omega^2 = -4\gamma^2, \tag{197}$$

donde los fotones y electrones de energía $\omega = \gamma$ se propagan direcciones opuestas.

4.7.3. Producción de pares - sección eficaz

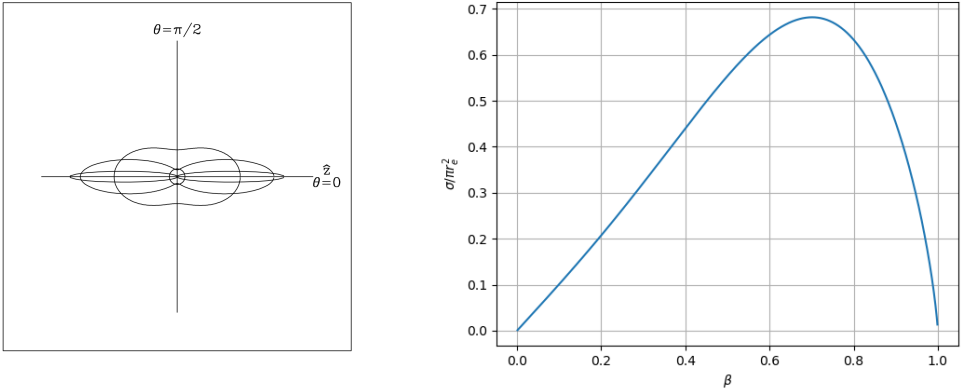


Figura 26: Sección eficaz diferencial (*izquierda*) y total (*derecha*) para la producción de pares $\gamma\gamma \to e^+e^-$, referenciada al CM. La sección eficaz diferencial mantiene comportamiento bipolar, elongándose a medida que ω aumenta. La sección eficaz total se muestra aquí en función de β, la velocidad del par en el CM.

4.7.4. Aniquilación electrón-positrón - proceso, sección eficaz

- La aniquilación de pares, $e^+e^- \to \gamma\gamma$, tiene misma relación de invariancia que la producción de pares (195). Los dos procesos están estrechamente ligrados de manera que,

$$\sigma_{ee\to\gamma\gamma} = \left(\frac{2}{\beta^2}\right)\sigma_{\gamma\gamma\to ee},$$

con un factor de dos debido a que electrón y positrón son distinguibles mientras que los fotones no lo son.

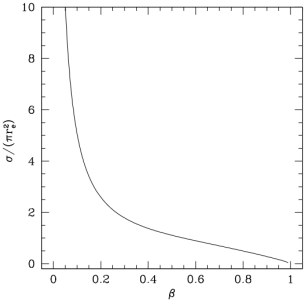


Figura 27: Sección eficaz para la aniquilación de pares $e^+e^- \to \gamma\gamma$, en términos de la velocidad β de los electrones en el centro de momento. La sección eficaz diverge para electrones lentos, $\beta \to 0$.

4.7.4. Aniquilación electrón-positrón - positronio

- La sección eficaz de aniquilación diverge a baja energía, $\sigma \to \pi r_e^2/\beta$ (fig. 27), favoreciendo la aniquilación de pares relativamente lentos.
- Se ha observado una línea delgada de aniquilación, a $mc^2 \simeq 0.511\,\mathrm{MeV}$, en el centro Galáctico - originalmente con *CGRO*-OSSE en los 1990s.
- La presencia de e^-e^+ lentos propicia la formación de un sistema ligado análogo al hidrógeno, denominado positronio.
- Dependiendo de la configuración, el positronio decae en dos o tres fotones, dando lugar a una línea ($e^+e^- \to \gamma\gamma$) o un continuo ($e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$).
- La detección del *continuo de positronio*, junto con la línea de aniquilación, evidencia la presencia de e^+e^- lentos en el centro Galáctico.

4.7.5. Interacciones de un vértice - en campos magnéticos

- La interacciones de un vértice,

$$e^- \to \gamma e^-, \quad \gamma \to e^- e^+, \quad e^+ e^- \to \gamma,$$

  no conservan energía-momento, pero ocurren en presencia de campos que absorban energía o momento. Las secciones eficaces son de orden αr_e^2.
- La emisión sincrotrón corresponde con la interacción $e^- \to \gamma e^-$ en un campo magnético. Se escribe también como $e^- B \to \gamma e^- B$.
- Otro canal de esta interacción es la producción de pares en un campo magnético, $\gamma B \to e^- e^+ B$, de umbral

$$E_1 \left(\alpha B^2 \lambda_c^3\right) \gtrsim (mc^2)^2 \quad \Rightarrow \quad x \equiv \left(\frac{E_1}{mc^2}\right)\left(\frac{B}{B_c}\right) \gtrsim 1.$$

  donde $B_c \equiv m^2 c^3 / e\hbar \simeq 4 \times 10^{13}\,\mathrm{Gauss}$ es el campo magnético crítico.
- Una interacción de tres vértices en $B \sim B_c$ es "photon splitting", $\gamma B \to \gamma\gamma B$.

4.7.5. Interacciones de un vértice - campo electrostático

- Bremsstrahlung puede representarse como

$$e^- Z \to \gamma e^- Z,$$

con Z indicando el campo electrostático.

- La producción de pares $e^\pm$ en la vecindad de un núcleo cargado, $\gamma Z \to e^- e^+ Z$, viene dada en términos del parámetro de impacto y la carga del núcleo,

$$\frac{Ze^2}{b} \sim mc^2 \Rightarrow \sigma \sim \alpha b^2 \sim \alpha Z^2 r_e^2.$$

- El cálculo de la sección eficaz de producción de pares da

$$\sigma = \frac{28}{9}\alpha\, Z^2 r_e^2 \left\{ \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}\right) - \frac{109}{42} \right\} \quad \text{para} \quad \hbar\omega/mc^2 \gg 1\,.$$

4.7.5. Interacciones de un vértice - cascadas electromagnéticas

- Un fotón de alta energía en un campo magnético, electrostático o de radiación puede producir un par, $\gamma \to e^+e^-$. Estos a su vez pueden interaccionar con el mismo campo, $e^\pm \to \gamma e^\pm$, y producir más fotones de alta energía.
- Si los procesos tienen condiciones adecuadas para continuar, ocurre una cascada electromagnética.
- Estas cascadas ocurren en la atmósfera y pueden ser detectadas directamente con arreglos de detectores de partículas o por la radiación Cherenkov emitida por los electrones de alta energía en el aire.
  - La radiación Cherenkov se produce si $v > c/n$, siendo n el índice de refracción del medio: es anisotrópica, restringida a un cono de apertura $\cos\psi \approx 1/\beta n \to 1/n$.
- Cascadas electromagnéticas también ocurren en escenarios astrofísicos como la vecindad de hoyos negros supermasivos o de estrellas de neutrones.