Capítulo IV

Medidas en el espacio-tiempo: Teoria

Una vez conocemos $a(t)$ estamos en situación de resolver la relación entre la coordenada co-móvil χ y el redshift z. Esta es una relación de suma importancia, ya que el redshift es una cantidad directamente observable que podemos relacionar con el sistema de coordenadas, que en general no es observable.
Hacer medidas en un universo en expansión no es del todo trivial puesto que hay que tener en cuenta que las distancias cambian con el tiempo. La solución mas sencilla es hacer los cálculos en coordenadas co-móviles y luego pasar a distancias propias.

IV.1 Relación entre z y la coordenada co-móvil χ

Considerar la propagación de un rayo de luz (recorre una distancia propia $ad\chi = cdt^1$), que se emite a un tiempo t_2 y una coordenada χ_2 y se recibe en un tiempo t_1 y una coordenada χ_1:

$$\chi_2 - \chi_1 = \int_{t_2}^{t_1} \frac{c\ dt}{a(t)} \tag{IV.1}$$

donde tomamos un camino radial $d\Omega = 0$. Podemos dejar esta expresión en función del parametro de Hubble haciendo un cambio de variables de t a a en la segunda integral:

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{c\ dt}{a(t)} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{c\ da}{a\dot{a}} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{c\ da}{H\ a^2} \tag{IV.2}$$

Ahora podemos utilizar la ley de Hubble en Eq.[III.34] en términos de a:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_M\ a^{-3}\ +\ \Omega_R\ a^{-4}\ +\ \Omega_k\ a^{-2}\ +\ \Omega_\Lambda \right], \tag{IV.3}$$

donde hemos tomado $a = 1$ en $z = 0$ por simplicidad. Como la señal se recibe en $z = 0$ tenemos $a_{t_1} = 1$ y $H_0 = H(t_1)$ (aunque se podría haber tomado cualquier otro valor).
La integral anterior Eq.[IV.2] no tiene una solución analítica y el resultado depende de los valores de los parámetros cosmológicos. Si tomamos que $\chi_1 = \chi_0 = 0$ y $\chi_2 = \chi$ (o $r_2 = r$) con $a_2 = (1+z)^{-1}$ tenemos:

$$\boxed{\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_{a=(1+z)^{-1}}^{a=1} \frac{da}{\sqrt{\Omega_m\ a\ +\ \Omega_\gamma\ +\ \Omega_k\ a^2\ +\ \Omega_\Lambda\ a^4}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad \text{(IV.4)}}$$

[1]Esto corresponde a un tiempo propio nulo $ds^2 = 0 = c^2dt^2 - a^2d\chi^2$

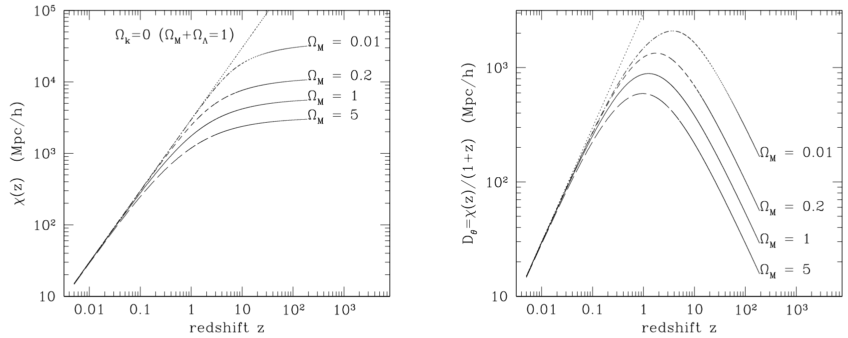

Figura IV.1: Panel izquierdo: distancia radial co-móvil $\chi = \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$ (en unidades de Mpc/h, con $\frac{c}{H_0} \simeq 3000 Mpc/h$) como función del redshift z para diferentes parámetros cosmológicos en universo plano $\Omega_k = 0$. Panel derecho: distancia tamaño angular $D_\theta = \chi/(1+z)$ para los mismos modelos. En ambos paneles, la línea de puntos muestra la ley de Hubble: $\chi = c\ z/H_0$.

donde $E(z) \equiv H(z)/H_0$ dada por Eq.[III.34].
En general, como puede verse en la Figure IV.1 (panel izquierdo), cuanto menor es la densidad Ω_M o mayor es la constante cosmológica Ω_Λ mayor es la distancia a los objetos a un determinado redshift. Todas ellas son menores que la ley de Hubble líneal: $\chi = \frac{c}{H_0}\ z$. Esto se debe a que en el límite de z grandes $E(z)$ crece como una potencia positiva de z de manera que su contribución a la integral es negligible. Esto explica porqué $\chi(z)$ tiende a una constante (ver panel izquierdo de la Fig. IV.1) cuando $z \to \infty$.

IV.2 Distancia del tamaño angular

¿ Con qué angulo θ_A observaremos un objeto de tamaño propio d_p si se encuentra a redshift z? Inicialmente la pregunta parece trivial: solo hay que dividir el tamaño por el radio. Pero al hacer este cociente tenemos que decidir en que tiempo vamos a evaluar cada cantidad: en el momento de la emisión, a redhift z, o en la recepcion, a redshift $z = 0$? La solución mas sencilla es hacer el cálculo en coordedanas co-movóviles.
Consideremos que observamos la luz que nos llega de un objeto (eg una galaxia) correspondiente a un diametro observable de tamaño propio d_p. Si la galaxia esta a un redshift z, el diametro de la galaxia en coordenadas comoviles es $d_p/a = d_p(1+z)$ y la distancia radial co-movil es $\chi(z)$, dado por Eq.[IV.4]. Por tanto el **ángulo aparente** θ_A en coordenadas comoviles es:

$$\theta_A = \frac{d_p\ (1+z)}{\chi(z)} \tag{IV.5}$$

Para cuando la imagen nos llega a $z = 0$ todas las distancias propias han cambiado, pero el ángulo θ_A no cambia.
Podemos llegar a esta misma expresión utilizando la **métrica FRW** en Eq.[II.10]. Utilizaremos la métrica para calcular el tamaño propio de la galaxia d_p en función de las coordenadas. Debemos calcular la distancia propia $dl = -ds$ entre dos sucesos simultaneos ($dt = 0$) que caracterizen el diametro observable (d_p) de la galaxia: cada suceso esta en uno de los extremos que define este diametro. Por simplicidad tomamos el observador en el centro de coordenadas y el diametro de la galaxia en el plano $x - y$ ($z = 0$ o $\theta = 0$), tangente al radio χ de manera que $d\theta = 0$ y $d\phi = \theta_A$. Los dos sucesos son por tanto: $(t, \chi, \theta = 0, \phi = 0)$ y $(t, \chi, \theta = 0, \phi = \theta_A)$ y por tanto: $d\chi = 0$ y $d\Omega = \theta_A$, con lo que tenemos

$$d_p = dl = -ds = a(t)\ \chi\ \theta_A, \tag{IV.6}$$

que coincide con Eq.[IV.5]. En el caso con curvatura Eq.[**??**], tenemos:

$$d_p = dl = -ds = a(t)\ S_k(\chi)\ \theta_A, \tag{IV.7}$$

con S_k dado en Eq.[II.12].
Podemos definir una **distancia del tamaño angular** como el cociente entre la distancia propia y el ángulo aparente con la que observamos el objeto.

$$D_\theta \equiv \frac{d_p}{\theta_A} = a(t)\ \chi \tag{IV.8}$$

($D_\theta = a(t)\ S_k(\chi)$ con curvatura). Para poder conectar esta definición con las observaciones necesitamos la relación de la coordenada χ con el redshift z en Eq.[IV.4]. El panel derecho de la Fig.IV.1 muestra $D_\theta(z)$. Si observamos un objeto de un tamaño (d_p) conocido y medimos su redshift z y su tamaño aparente θ_A tendremos una medida de $\chi = \chi(z)$ que podemos usar para estimar los parametros cosmológicos en $E(z)$. Observese que como $D_\theta(z)$ es una función bivaluada, de manera que dado el tamaño angular de un objeto conocido, existen dos soluciones para el redshifts. Esto es debido a la contracción del universo a altos redshifts.
Es fácil demostrar que para un universo plano sin constante cosmológica (**EdS**) tenemos:

$$D_\theta = \frac{2c}{H_0}\ \left[(1+z)^{-1} - (1+z)^{-3/2}\right] \tag{IV.9}$$

que, para redshifts pequeños nos da una relación lineal entre distancia y redshift:

$$D_\theta \simeq \frac{z\ c}{H_0} + \mathcal{O}(z^2) \tag{IV.10}$$

identica a la **ley de Hubble**.

IV.3 Distancia de Luminosidad

De igual manera podemos definir la **distancia luminosidad** como la correspondiente al cociente entre el flujo aparente observado $F_0 = F(t_0)$ y la luminosidad propia $L = L(t)$ en el momento de la emisión:

$$D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F_0}} = \frac{\chi}{a(t)} \tag{IV.11}$$

Para llegar a esta expresión hay que tener en cuenta que la luminosidad (densidad de radiación) disminuye como a^{-4} al expandirse el universo: $L = L_0\ a^{-4}$, Eq.[III.4], y que $4\pi a^2\ \chi^2$ es la superficie esférica propia en una coordenada co-movil χ radial.[2] Por tanto, el flujo observado es $F_0 = L_0/(4\pi a^2\ \chi^2) = La^2/(4\pi\ \chi^2)$, de donde sale direcatamente la Eq.[IV.11].
La **magnitud absoluta** es simplemte:

$$M = -2.5 \log(L/L_0), \tag{IV.12}$$

donde L_0 es la luminosidad de un objeto de magnitud absoluta zero, y la **magnitud aparente** se define apartir del flujo observado, de manera que:

$$m \equiv M + 2.5 \log{(d/10pc)^2}, \tag{IV.13}$$

es decir igual a la magnitud absoluta que tendria a una distancia de $d = 10pc$ (parsecs). Por tanto la magnitud aparente de un objeto a redshift z y con magnitud absoluta M, viene dada por:

$$m(z) = M + 5 \log\left(\frac{D_L(z)}{10pc}\right) \tag{IV.14}$$

o, si ponemos D_L en unidades de Megaparsec (Mpc):

$$m(z) = M + 5 \log D_L(z) + 25. \tag{IV.15}$$

(ver §IV.7 para la correción-K). A menudo se define como **distancia modulo** (en inglés: **distance modulus**):

$$\mu \equiv m - M = 5 \log D_L(z) + 25 \tag{IV.16}$$

que se utiliza como indicador de distancia.
Es fácil demostrar que para un universo plano sin constante cosmológica (**EdS**) tenemos:

$$D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F_0}} = \frac{2c}{H_0}\ \left[1 + z - \sqrt{1+z}\right] \tag{IV.17}$$

que, para redshifts pequeños nos da una relación lineal entre distancia y redshift:

$$D_L \simeq \frac{z\ c}{H_0} + \mathcal{O}(z^2) \tag{IV.18}$$

identica a la **ley de Hubble**.

IV.3.1 Distancias radiales

Resuminedo, tenemos 4 distancias radiales distintas:

$$\boxed{\begin{aligned} d &= cz/H_0 \\ D &= \chi(z) \\ D_\theta &= \chi(z)/(1+z) \\ D_L &= \chi(z)\ (1+z) = D_\theta/a^2 \end{aligned}} \tag{IV.19}$$

[2] De nuevo, en el caso del universo con curvatura debemos sustituir χ por $S_k(\chi)$: $D_L = S_k(\chi)/a(t)$, con S_k dado en Eq.[II.12].

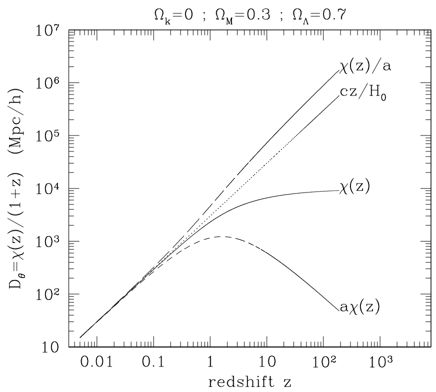

Figura IV.2: Comparación de las cuatro distancias radiales para el mismo modelo cosmológico: $\Omega_k = 0$, $\Omega_M = 0.3$ y $\Omega_\Lambda = 0.7$.

a utilizar según sea la situación. La primera es la distancia dada por la ley de Hubble local. Para cálculos en coordenadas co-móviles, usaremos χ. Para cálculos de ángulos usaremos $D_\theta = a\chi$ y las distancias propias. El factor a aparece porque las distancias propias aumentan en el tiempo que tarda la luz en llegarnos desde el objeto observado.
Para cálculos de luminosidades usaremos $D_L = \chi/a$. El factor $1/a^2$ respecto al caso D_θ aparece porque la luminosidad disminuye en un factor a^4 en el tiempo que tarda la luz en llegarnos desde el objeto observado.
La FiguraIV.2 muestra la relación de estas distancias con el redshift z para el modelo cosmológico standard: $\Omega_k = 0$, $\Omega_M = 0.3$ y $\Omega_\Lambda = 0.7$.

IV.4 Horizonte causal: horizonte de párticula

Una aplicación directa de la fórmula anterior Eq.IV.1 es las distancia co-móvil χ que recorre la luz desde el comienzo del universo ($t = 0, \chi$) hasta un tiempo dado ($t_0, \chi = 0$):

$$\chi_H = \int_0^{t_0} \frac{c\ dt}{a(t)} \tag{IV.20}$$

donde t_0 es la edad del Universo para un factor de escala dada ($a = 1$ corresponde a nuestra época). Notese que coincide esencialmente el tiempo conforme en Eq.[II.13]:

$$\chi_H = c\ \eta \tag{IV.21}$$

La distancia propia asociada es:

$$d_H = a(t_0)\ \chi_H = a \int_0^{t_0} \frac{c\ dt}{a(t)} = a \int_0^{a} \frac{c\ da}{a^2\ H} \tag{IV.22}$$

y se conoce como **distancia al horizonte causal** o **distancia al horizonte de partículas**, puesto que la distancia más grande que esta conectada causalmente con nosotros. Eventos que sucedan a distancias mayores no han tenido tiempo de alcancarnos. Esta distancia define el tamaño del **universo observable**. En caso plano $k = 0$ y con $\Omega_\Lambda = 0$ (universo de **Einstein-deSitter**, **EdS**) tenemos: $d_H \simeq 3ct_0$, donde hemos tenido en cuenta que la mayor parte del tiempo el universo esta dominado por materia y podemos despreciar el cambio de rítmo que ocurre en la fase de radiación.
La distancia d_H es típicamente mayor que la distancia que recorre la luz en la **edad del universo** (ver Eq.[IV.25]), conocida como **distancia de Hubble**:

$$d_{Hubble} = ct_0. \tag{IV.23}$$

El que $d_H > d_{Hubble}$ era de esperar, puesto que el universo esta en expansión.

IV.5 Edades y redshift: Lookback time

La **edad del universo** t_0 es el tiempo que trasncurre entre $a = 0$ ($z = \infty$, el **Big Bang**) y hoy en dia: $a = 1$ ($z = 0$).
Partiendo de la definición de redshift, Eq.[II.25], $z = 1/a - 1$, tenemos, diferenciando respecto al tiempo:

$$\frac{dz}{dt} = -H/a = -H(z)(1+z) = -H_0\ E(z)\ (1+z), \tag{IV.24}$$

donde $E(z) \equiv H(z)/H_0$ esta dada por Eq.[III.34]. Por tanto tenemos:

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)\ E(z)} \tag{IV.25}$$

En un universo plano sin constante cosmológica (**EdS**) la edad del Universo es:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \simeq 10Gyr \tag{IV.26}$$

para $H_0 = 70Km/s/Mpc$ ($1Gyr$ es 10^9 años) y por tanto la **distancia de Hubble** Eq.[IV.23] correpondiente es:

$$d_{Hubble} = ct_0 = \frac{2c}{3H_0} \simeq 3000Mpc \tag{IV.27}$$

Mientras que la **distancia al horizonte causal** d_H en Eq.[IV.22] es: $d_H \simeq 9000Mpc/h$.
Esto se puede generalizar para calcularse la edad del universo en cualquier otro redshift:

$$t_0(z) = H_0^{-1} \int_z^{\infty} \frac{dz}{(1+z)\ E(z)} \tag{IV.28}$$

El **tiempo transcurrido** (**lookback time**) es el tiempo diferencia entre nuestra época t_0 y el tiempo $t = t(z)$ correspondiente a la emisión de una rayo de luz a redshift z. Es decir la diferencia entre las edad t_0 y la edad a redshift z: $t_0(z)$:

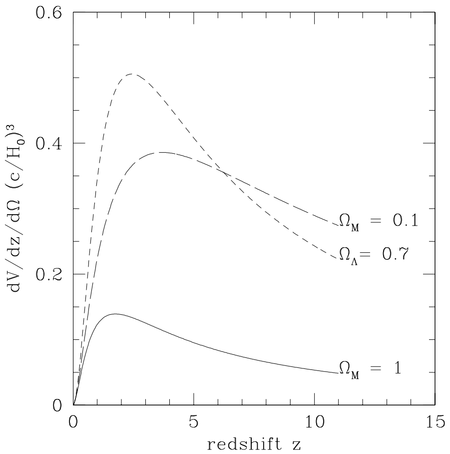

Figura IV.3: Elemento de volumen co-móvil $\frac{dV}{d\Omega\ dz} = S_k(\chi)^2\ \frac{c}{H(z)}$. como función del redshift para diferentes parámetros cosmológicos: $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_M = 1$ (línea continua); $\Omega_\Lambda = 0.7$ y $\Omega_M = 0.3$ (línea de rayas cortas) y $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_M = 0.1$ (línea de rayas largas).

$$t_{lookback}(z) = H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\ E(z)} = H_0^{-1} \int_0^z\ (1+z)^{-1} \left[(1+z)^2(1+\Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda\right]^{-1/2} \tag{IV.29}$$

En general, cuanto menor es la densidad Ω_M o mayor es la constante cosmológica Ω_Λ mayor es la edad de los objetos a un determinado redshift.
Para un universo plano sin constante cosmológica (**EdS**) la edad del Universo a un redshift z es:

$$t_{edad}(z) \simeq \frac{2}{3} H_0^{-1}\ \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \tag{IV.30}$$

Para un universo plano dominado por materia (no relativista) (pero con constante cosmológica: $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$) la edad del Universo a un redshift z es:

$$t_{edad}(z) = \frac{2}{3(1-\Omega_M)^{1/2}}\ H_0^{-1}\ sinh^{-1}\left[\left(\frac{1-\Omega_M}{\Omega_M}\right)^{1/2}\ (1+z)^{-3/2}\right] \tag{IV.31}$$

IV.6 Volumen y Conteos: Number counts

El **volumen propio** a un redshift $z \pm dz$ en un area $d\Omega$ viene dado por el area de la superficie esférica: $d_\theta^2(z)\ d\Omega$ y el grosor es $dl = c\ dt$ (lo que tarda la luz en atravesar dz):

$$\frac{dV}{d\Omega\ dz} = d_\theta^2(z)\ \frac{c\ dt}{dz} = \frac{S_k(\chi)^2}{(1+z)^2}\ \frac{c}{H(z)\ (1+z)} \tag{IV.32}$$

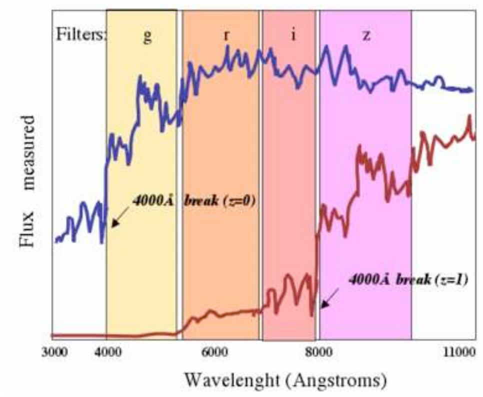

Figura IV.4: En azul se muestra el espectro caracteristico de una galaxia ellíptica a $z = 0$ donde se ve el salto caracteristico a $4000A$ (**4000A break**). En rojo se muestra el mismo espectro a $z = 1$. Las longitudes de onda aumenta en un factor $1+z$ ($= 2$ en este caso) y el flujo aparente disminuye (al aumentar D_L). Los filtros observacionales se muestran como bandas de colores. El salto de $4000A$ pasa del filtro 'g' al filtro 'z'. La corrección-K intenta compensar el cambio de flujo en un filtro dado debido a este corrimiento hacia el rojo de los espectros.

Supongamos que tenemos una densidad constante n_0 de objetos en el cielo. En número de objetos en función del flujo $N(F)$ que observariamos en un redshift z y $z+dz$ es:

$$\frac{dN}{dz} = n_0\ (1+z)^3\ \frac{dV}{d\Omega\ dz} = n_0 \frac{c\ S_k(\chi)^2}{H(z)} \tag{IV.33}$$

ya que la densidad propia es $n = n_0\ (1+z)^3$ A esta fórmula hay que introducirle la restricción observacional de que los catálogos de objetos estan limitados en magnitud aparente.
En general, cuanto menor es la densidad Ω_M o mayor es la constante cosmológica Ω_Λ mayor es la densidad de objetos a un determinado redshift. Pero, como muestra la Figura IV.3, llega un momento en que el volumen, por unidad de redshift, se hace menor debido a que el universo se contrae al aumentar z. El z donde esto ocurre es mayor cuanto menor es la densidad Ω_M o mayor es la constante cosmológica Ω_Λ.

IV.7 Correción-K (K-correction)

Se llama así a la correción en la magnitud aparente de un objeto debida a que las longitudes de onda en el espectro de emisión $L[\nu]$ sufren un corrimieto hacia el rojo al ser detectadas. El problema se ilustra en la Figura IV.4. Si la frecuencia propia en el sistema del observador es ν_0, que se denomina **rest frame** o **sistema en reposo**, tenemos que la frecuencia emitida es: $\nu = (1+z)\nu_0$. Si la luminosidad total emitida en un cierto **filtro** (o region spectral) F en el

sistema en reposo es:

$$L_F(reposo) = \int_F d\nu_0 \; L[\nu_0] \tag{IV.34}$$

la luminosidad en el **sistema emisión** correponde al rango:

$$L_F(emision) = \int_F d\nu_0 (1+z) \; L[\nu_0(1+z)] \tag{IV.35}$$

El cambio que se observa en la magnitud aparente Eq.[IV.15] es:

$$m_F = M_F + 5 \log D_L(z) + 25 - K(F, z) \tag{IV.36}$$

donde M_F es la magnitud absoluta en el filtro F y:

$$K(F, z) = 2.5 \log \left(\frac{\int_F d\nu_0 (1+z) \; L[\nu_0(1+z)]}{\int_F d\nu_0 \; L[\nu_0]} \right) \tag{IV.37}$$

Para un **espectro plano**: $L(\nu_0) = L_0$ constante, tenemos:

$$K(z) = 2.5 \log (1+z) \tag{IV.38}$$

independientemente del filtro.

IV.8 Problemas

1. Desmostrar que para el caso $\Lambda = 0$ ($k \neq 0$) se cumple:

$$r = S_k(\chi) = \left(\frac{2\, c}{H_0} \right) \; \frac{2 - \Omega_M + \Omega_M z - (2 - \Omega_M)(1 + \Omega_M z)^{1/2}}{\Omega_M^2 (1+z)} \tag{IV.39}$$

2. Demostrar que para redshifts pequeños:

$$\chi \simeq \left(\frac{c}{H_0} \right) \; \left(z - (1+q_0) z^2 + \cdots \right) \tag{IV.40}$$

   ¿Qué interpretación tiene esta relación?

3. a) Calcular el tamanyo angular de las regiones que estan (aparentemente) desconectadas causalmente en la radiación cósmica de fondo. Asumir que esta radiación llega de una superficie esferica delgada situada a z=1100. b) Argumentar porque el resultado es mayor o menor en el caso de EdS que en el de un universo con constante cosmologica. c) Calcular con qué angulo observariamos hoy en dia dicha distancia desde la Tierra.

4. Calcularse el horizonte causal en un universo plano con constante cosmológica. Dar el resultado en Mpc/h. Argumentar porqué es mayor o menor que el caso EdS.

5. a) ¿Qué edad maxima quede tener una galaxia cuyo redshift es $z = 2.5$? (asumir el modelo EdS, sin curvatura y sin constante cosmologica). b)) Que distancia comovil nos separa de esta galaxia? c) Cuanto ha tardado la luz en llegar al observador?

6. ¿ Que tamanyo físico y comoving tiene la galaxia del problema anterior si ocupa 5 segundos de arco en el cielo? b) ¿ Qué luminosidad absoluta tiene en el filtro B si medimos que tiene una magnitud $m_B = 23$?

7. Repetir los dos problemas anteriores para un universo plano que contiene un 70Discutir e interpretar la diferencia en los valores numéricos que se obtienen.

8. a) Calcular que edad tiene el universo cuando la radiación tiene una temperatura equivalente a 1 MeV. b) Calcular que edad tiene el universo cuando la radiación tiene una temperatura de 3300K. c) Que relevancia cosmológica tienen estas edades?

9. Demostrar la fórmula Eq.[IV.37] para cualquier filtro.